



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

---

O. Mankin

MEHAANIKA ÜLDFÜÜSIKA  
KURSUSES

TARTU 1973

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Üldfüüsika kateeder

O. Mankin

MEHAANIKA ÜLDFÜÜSIKA  
KURSUSES

Õppevahend füüsikaosakonna üliõpilastele

TARTU 1973

Kinnitatud Füüsika-Keemiateaduskonna nõukogus  
15. detsembril 1972.

Käesolev õppevahend on mõeldud Tartu Riikliku Ülikooli Füüsika-Keemiateaduskonna füüsikaosakonna, eriti aga selle osakonna pedagoogilise haru I kursuse üliõpilastele, kuid seda võivad kasutada ka teiste kõrgemate koolide füüsikaosakondade ja tehniliste harude üliõpilased.

Töö sisu ja ülesehitus vastavad füüsika erialale kehtestatud üldfüüsika programmile. Õppevahend sisaldab suhteliselt konspektiivselt esitatud teoreetilist materjali ning on illustreeritud lahendatud näidisülesannetega, mis on paigutatud iga peatüki lõppu.

Koostaja avaldab tänu dots. O. Seemanile ja dots. A. Paale kriitiliste märkuste ja näpunäidete eest, mis on töös arvesse võetud.

## 1. AINEPUNKTI KINEMAATIKA

Ainepunkt. Looduses ja praktikas esinevad kehad on liiga keerukad ja mitmekesised. Üldjuhul ühe reaalse keha liikudes ei liigu kõik tema punktid identselt, seega on tegemist paljude erinevate liikumistega korraga. Et liikumise kirjeldus muutuks lihtsamaks, vaadeldakse mehaanikas ainepunkti liikumist, mõistes selle all punkti, millesse kujutleme koondunud aine. Seega puuduvad niisugusel kujutletaval kehal kuju ja mõõtmed ning tema asukoha määramine ja liikumise kirjeldamine taanduvad geomeetrilise punkti asukoha ja selle liikumise kirjeldamisele. Ainepunktina võib vaadelda iga keha, mille mõõtmed on kaduvvääkesed, võrreldes tema liikumise ulatusega antud probleemi seisukohalt. Nii võib vaadelda Maad ainepunktina tema liikumises ümber Päikese ning on täiesti arusaadav, et seda ei saa teha juhul, kui on kõne all maakera ööpäevane pöörlemine ümber tema telje.

Taustsüsteem. Mehaanika põhimõisteks on liikumine, s.o. keha ümberpaiknemine teiste kehade suhtes. Ainult niisugusel - suhtelisel liikumisel - ongi mõte. Keha absoluutne liikumine on mõttetu, kuna ei eksisteeri absoluutset ruumi, milles saaks vaadelda kehade absoluutset liikumist. Keha või kehade süsteemi, mida tinglikult loetakse liikumatuks ning mille



suhtes vaadeldakse liikumist, nimetatakse taustsüsteemiks.

Taustsüsteemi võib valida suvaliselt, seega liigub sama keha erinevate taustsüsteemide suhtes erinevalt. Kõik võimalikud taustsüsteemid on võrdõiguslikud, kuid füüsikalised nähtused kulgevad erinevates süsteemides erinevalt, seepärast on loomulik valida niisugune süsteem, milles nähtuste kirjeldus oleks võimalikult lihtne. Kui üks keha on teistest kehadest nii kaugel, et nende mõju temale on kaduvväike ning võib jääda arvestamata, nimetatakse seda keha vabalt liikuvaks. Ka vaba liikumine on erinevates süsteemides erinev. Kui valida taustsüsteemiks vabalt liikuva kehaga seotud süsteem, siis niisuguses süsteemis on teiste vabalt liikuvate kehade liikumine ühtlane ja sirgjooneline. Viimane väide kannab nimetust inertsiseadus ning selle formuleeris esmakordselt Galilei<sup>§</sup>. Vabalt liikuva kehaga seotud taustsüsteemi nimetatakse inertsiaalseks. Iga süsteem, mis liigub inertsiaalsüsteemi suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt, on samuti inertsiaalne.

Füüsikalised nähtused kulgevad kõikides inertsiaalsüsteemides ühtemoodi. Seda väidet nimetatakse liikumise relatiivsuse printsiibiks.

Et füüsikaliste nähtuste kirjeldused kõikides inertsiaalsüsteemides on ühesugused, on loomulik valida taustsüsteemiks inertsiaalsüsteem.

Praktiliselt on füüsikas kasutatavad taustsüsteemid (näiteks Maaga seotud süsteem) ainult ligikaudu inertsiaalsed.

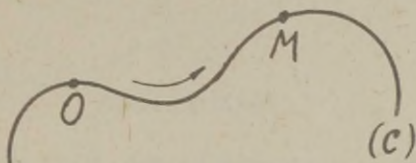
Trajektor. Trajektoor on joon, mille moodustavad ruumipunktid, mis keha oma liikumisel on läbinud.

---

<sup>§</sup> Galileo Galilei (1564–1642), itaalia füüsik ja astronoom.

Trajektoori kuju järgi liigitatakse liikumised sirg- ja kõverliikumisteks. Kõverjooneline trajektoor võib olla tasapinnaline (uisu mingi konkreetse punkti jälg jääs) või ruumiline (lennuki propelleritiiva otsa trajektoor).

Liikumisvõrrand. Liikugu keha  $M$  mingil trajektoorigil (C) (joon. 1:1). Et määrata selle keha asukoht kõveral (C) antud momendil (ajas), on tarvis fikseerida:



Joon. 1:1.

a) lähtemoment, millest alates loetakse keha  $M$  liikumise aega  $t$ . Selle lähtemomendi suhtes hilisemad ajamomendid avalduvad positiivsete ning varasemad negatiivsete arvudena;

b) lähtepunkt  $O$  kõveral (C), millest alates mõõdetakse keha  $M$  poolt läbitud tee pikkust. Valinud liikumise positiivse suuna ning märkinud selle noolega, saame määrata keha asukoha trajektoorigil (C) kaare  $OM = S$  pikkusega, mis osutub nagu aegki algebraliseks suuruseks, olles positiivne, kui ta on mõõdetud punktist  $O$  positiivses suunas, ning negatiivne sellega vastassuunas.

N i m e t a m e s u u r u s t  $S$  a b s t s i s s i k s.

Kirjeldada liikumist tähendab nüüd viia vastavusse algebraline suurus  $t$ , mis väljendab liikumise aega, samuti algebralise suurusega  $S$ , mis tähendab keha poolt läbitud tee pikkust, arvates lähtepunktist  $O$ , või tee pikkust, mis kehal on jäänud läbida enne punkti  $O$ . N i i s u g u s t v a s t a v u s t v ä l j e n d a v a t m a t e m a a t i l i s t s e o s t

$$S = f(t)$$

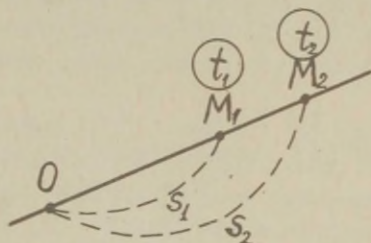
n i m e t a t a k s e l i i k u m i s v ö r r a n d i k s .

Positiivse suuna trajektoorigil võime valida suvaliselt, kuigi on loomulik, et see suund ühtiks keha liikumise suunaga. Samuti võib täiesti suvaliselt valida lähtepunkti  $O$ .

Ka lähtemomendi valik võib olla suvaline, kuid arvutuste lihtsustamise eesmärgil on otstarbekohane valida lähtemomendiks ajamoment, mil keha läbib trajektoori lähtepunkti  $O$ . Niisugusel juhul võiks öelda, et lähtepunkt ja lähtemoment ühtivad.

### 1.1. Sirgliikumine

Kiirusvektor. 1) Keskmine kiirus. Olgu sirgjoonelisel trajektoorigil ( $C$ ) liikuv keha  $M$  ajamomendil  $t_1$  kohas  $M_1$  ning ajamomendil  $t_2$  kohas  $M_2$  (joon. 1:2).



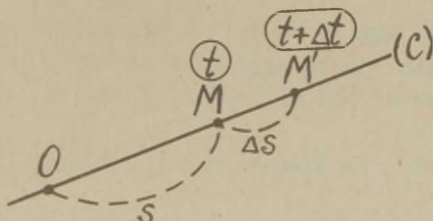
Joon. 1:2.

Abstsissid on vastavalt  $s_1$  ja  $s_2$ . Teelõik  $M_1M_2$  on läbitud ajavahemikus  $t_2 - t_1$ . Keskmine kiirus teelõigul  $M_1M_2$  (ajavahemikus  $t_2 - t_1$ )

$$v_k = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad (1.1)$$



2) Kiirus antud punktis (antud ajamomendil). Olgu  $s$  ja  $s + \Delta s$  sirgjoonelisel trajektoorigil (C) liikuva keha M abstsissid ajamomentidel  $t$  ja  $t + \Delta t$  (joon. 1:3).



Joon. 1:3.

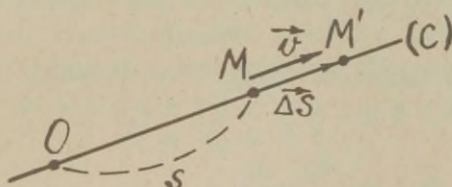
Keskmine kiirus teelõigul  $\Delta s$

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$\Delta t$  (sæega ka  $\Delta s$ ) vähenedes keskmine kiirus  $v_k$  läheneb kiirusele punktis M. Kiiruse tõeline väärtus punktis M

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1.2)$$

Et liikumine on suunatud protsess, tuleb  $\Delta s$  vaadelda kui ajavahemikule  $\Delta t$  vastavat nihkevektorit  $\vec{\Delta s}$  (joon. 1:4).



Joon. 1:4.



Kiirused  $\vec{v}_k$  ja  $\vec{v}$  on nihkevektoriga samasuunalised vektorid:

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{\Delta S}}{\Delta t}$$

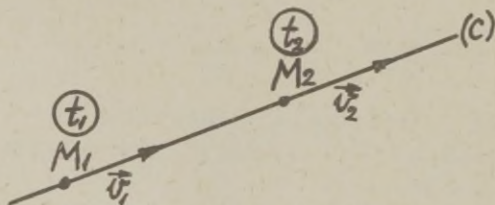
Kiiruse SI-ühikuks on  $m s^{-1}$ . Üldiselt võib kiiruse mõõtühikuna kasutada mistahes pikkus- ja ajaühikute analoogilist kombinatsiooni:  $km h^{-1}$ ,  $cm s^{-1}$ , mil  $h^{-1} = sõlm = 1852 m h^{-1}$ , ...

Kui  $\vec{v} = const$ , on liikumine ühtlane ning liikumisvõrrand

$$S = S_0 + \vec{v}t, \quad (1.3)$$

kus  $S_0$  on keha poolt enne aja lugemise algust läbitud tee pikkus.

Kiirendusvektor. 1) Keskmine kiirendus. Olgu  $\vec{v}_1$  ja  $\vec{v}_2$  kiirused, millega läbib keha  $M$ , liikudes mööda sirget  $(C)$ , punktid  $M_1$  ja  $M_2$  ajamomentidel  $t_1$  ja  $t_2$  (joon. 1:5).

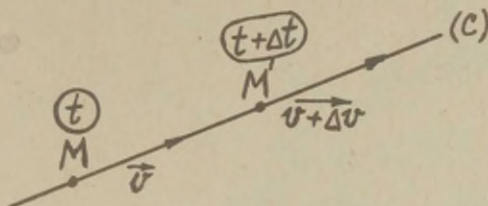


Joon. 1:5.

Kiiruse muutumist teelõigul  $M_1M_2$  (ajavahemikus  $t_2 - t_1$ ) iseloomustab keskmine kiirendus:

$$a_k = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

2) Kiirendus antud punktis (antud ajamomendil). Olgu  $v$  ja  $v + \Delta v$  sirgel (C) liikuva keha kiirused punktides M ja M' ajamomentidel vastavalt  $t$  ja  $t + \Delta t$  (joon. 1:6).



Joon. 1:6.

Keskmine kiirendus teelõigul  $MM'$  (ajavahemikus  $\Delta t$ )

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.4)$$

ning kiirendus punktis M (ajamomendil  $t$ )

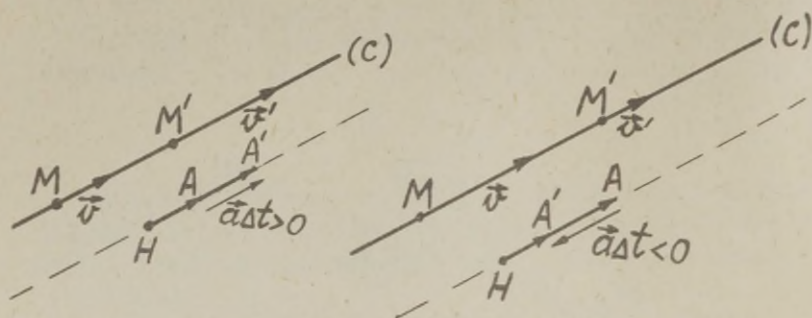
$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (1.5)$$

Kiirendus on samuti kui kiiruski vektoriline suurus. Sirg- liikumisel ühtib kiirendusvektori  $\vec{a}$  suund kiirusvektori  $\vec{v}$  suunaga (kiirenduse väärtus on seejuures positiivne) kiiruse kasvades ning on sellega vastupidine (kiirenduse väärtus negatiivne) kiiruse kahanedes. Vt. joon. 1:7, kus  $\vec{HA} = \vec{v}$  ning  $\vec{HA}' = \vec{v}'$ .

Kiirenduse SI-ühikuks on  $m/s^2$ . Samuti võib kiirenduse mõõtühikuna kasutada mistahes pikkus- ning ajaühikute analoogilist kombinatsiooni:  $km/h^2$ ,  $cm/s^2$ , ...

Kui  $a = \text{const}$ , on liikumine ühtlaselt kiirenev ning

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad (1.6)$$



Joon. 1:7.

kus  $\vec{v}_0$  on algmomendile vastav kiirus (algkiirus), ja

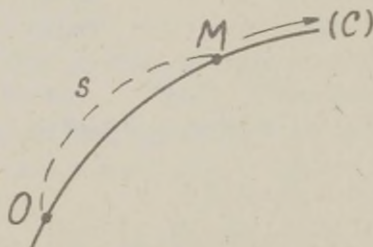
$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}, \quad (1.7)$$

kus  $\vec{s}_0$  on algmomendile vastav kohavektor.

Kehade vaba langemine Maa raskusväljas on ligikaudu ühtlaselt kiirenev liikumine kiirendusega  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ .

## 1.2. Kõverliikumine

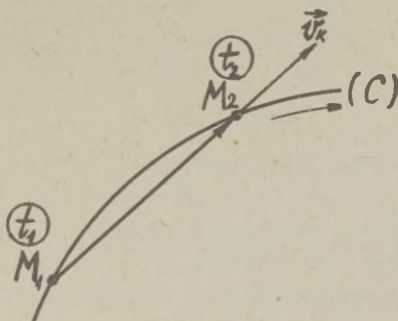
Antud trajektoorigil (C) liikuva keha (aine punkti) M asukoht lähtepunkti O suhtes igal ajamomendil  $t$  on määratud kaare  $\widehat{OM}$  (abstsissi  $s$ ) algebralise väärtusega (joon. 1:8).



Joon. 1:8.

Kui on teada sõltuvus  $s = \varphi(t)$ , s.o. liikumisvõrrand, on liikumine sellega täielikult määratud.

Kiirusvektor. 1) Keskmine kiirus. Olgu trajektoorigil  $(C)$  liikuva keha asukohad ajamomentidel  $t_1$  ja  $t_2$  vastavalt  $M_1$  ja  $M_2$  (joon. 1:9).



Joon. 1:9.

Nimetame vektorit  $\vec{M_1 M_2}$  nihkevektoriks ning selle suhet ajavahemikuga  $t_2 - t_1$  keskmiseks kiiruseks antud teelõigul (antud ajavahemikul):

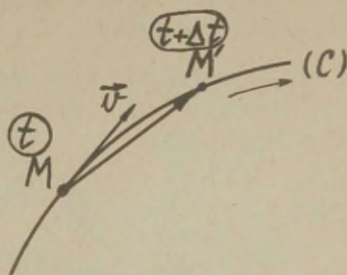
$$\vec{v}_k = \frac{\vec{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} \quad (1.8)$$

Seega on keskmise kiiruse suunaks teelõigule  $M_1 M_2$  vastava kõõlu  $M_1 M_2$  suund.

2) Kiirus antud punktis (antud ajamomendil). Liikugu keha antud trajektoorigil  $(C)$  ning läbigu ajamomentidel  $t$  ja  $t + \Delta t$  vastavalt punktid  $M$  ja  $M'$  (joon. 1:10). Keskmine kiirus ajavahemiku  $\Delta t$  jaoks

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{M M'}}{\Delta t}$$





Joon. 1:10.

on suunatud mööda kõõlu (vektorit)  $\vec{MM'}$ . Ajavahemiku  $\Delta t$  vähenedes ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) läheneb punkt  $M'$  punktile  $M$  ning kõõlust  $MM'$  saab piirasendis puutuja. Seega on kiirusvektor  $\vec{v}$  punktis  $M$  suunatud mööda trajektööri puutujat liikumise suunas. Kiiruse algebraline väärtus

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1.9)$$

Kui  $v = \text{const}$ , on liikumine ühtlane ning selle võrrandiks

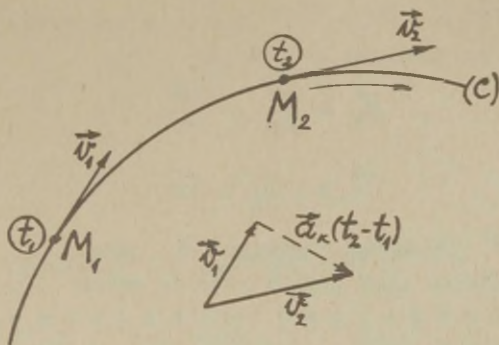
$$S = S_0 + vt, \quad (1.10)$$

kus  $S_0$  on keha poolt enne aja lugemise algust läbitud tee pikkus.

Kiirendusvektor. 1) Keskmine kiirendus. Kõverliikumise üldjuhul võib kiirus muutuda mitte ainult suuruse, vaid ka sihi ja suuna poolest (joon. 1:11). (Sirgliikumises jääb kiirenduse siht alati samaks.) Ka niisugusel juhul iseloomustatakse kiiruse muutumist kiirendusega.

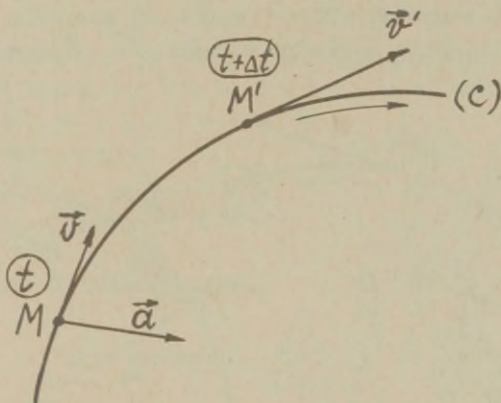
Keskmine kiirendus teelõigul  $M_1M_2$  (ajavahemikus  $t_2 - t_1$ )

$$\vec{a}_k = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (1.11)$$



Joon. 1:11.

2) Kiirendus antud punktis (antud ajamomendil). Kui  $\Delta t \rightarrow 0$ , siis  $\vec{v}' \rightarrow \vec{v}$  ja  $\vec{a}_n \rightarrow \vec{a}$  (joon. 1:12). Vektori  $\vec{a}$  suund ja suurus sõltuvad konkreetsetelt vaadeldava liikumise iseloomust.



Joon. 1:12.

3) Kiirenduse tangentsiaal- ja normaalkomponent. Teostame vektorite  $\vec{v}'$  ja  $\vec{v}$  lahutamise, kandnud vektori  $\vec{v}'$  punkti  $M$  (joon. 1:13). Vektori  $\Delta \vec{v}$  lahutame kaheks komponentiks, millest üks on vektoriga samasihiline ning mille

suurus  $|\Delta \vec{v}_1| = |\vec{v}'| - |\vec{v}|$ . Seega on lahutatud kaheks komponendiks ka keskmine kiirendus:

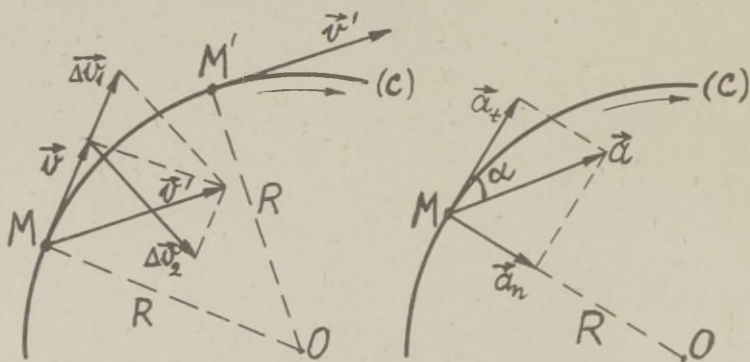
$$\vec{a}_k = \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t},$$

$$\vec{a}_k = \vec{a}_{k1} + \vec{a}_{k2}$$

Punkti  $M'$  lähenedes punktile  $M$  jääb  $\vec{a}_{k1}$  kogu aeg samasuunaliseks ning piirväärtusena annab  $\vec{a}_t$ -kiirenduse tangentsiaalkomponendi, mille suurus

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (1.12)$$

ning mis iseloomustab kiiruse suuruse muutumist. Keskmise kiirenduse teine komponent  $\vec{a}_{k2}$  samal ajal muudab oma suunda ning piir-asendis on suunatud mööda trajektoori normaali punktis  $M$ . See on kiirenduse normaalkomponent  $\vec{a}_n$ . Viimase suuruse



Joon. 1:13.

saame, vaadeldes sarnaseid kolmnurki, mille moodustavad punktidesse  $M'$  ja  $M$  tõmmatud kõverusraadiused  $R$  ja teelõik  $MM' = \Delta s$  ning vektorid  $\vec{v}'$ ,  $\vec{v} + \Delta \vec{v}_1$  ja  $\Delta \vec{v}_2$ .

Võime kirjutada:

$$\frac{\Delta v_2}{v'} = \frac{\Delta s}{R}$$

ehk

$$\frac{\Delta v_2}{\Delta t} : v' = \frac{\Delta s}{\Delta t} : R$$

Siit,  $M'$  lähenedes  $M$ -le ( $\Delta t \rightarrow 0$ ):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = a_n; \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v; \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v' = v$$

ja

$$\frac{a_n}{v} = \frac{v}{R}$$

kust

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1.13)$$

Kiirenduse normaalkomponent  $\vec{a}_n$  iseloomustab kiiruse muutumist suuna poolest.

Kogukiirenduse suurus

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (1.14)$$

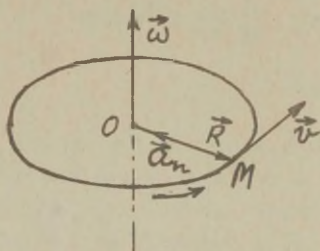
ning selle nurk liikumise suunaga

$$\alpha = \arctan \frac{a_n}{a_t} \quad (1.15)$$



### 1.3. Ringliikumine

1) Ühtlane ringliikumine. Ühtlasel liikumisel mööda ringjoont säilitab keha oma kiiruse (joonkiiruse) suuruse  $v$  ( $a_t = 0$ ). Niisuguse liikumise täielikuks iseloomustamiseks peab olema teada  $R$  ja  $v$  ning lisaks tuleb määrata veel liikumise suund ( $\rightarrow$ ) mööda ringjoont (joon. 1:14). Antud liikumise kiirendus  $\vec{a} = \vec{a}_n$  ning selle suurus  $a_n = \frac{v^2}{R}$ .



Joon. 1:14.

Joonkiiruse  $v$  asemel võib ühtlast ringliikumist iseloomustada nurkkiirusega  $\vec{\omega}$ , millega pöörleb mööda ringjoont liikuva punkti  $M$  raadiusvektor  $\vec{R}$ . Nurkkiirus  $\vec{\omega}$  on aksiaalvektor, mille moodul

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.16)$$

kus  $T$  - tiirlemisperiood - on ajavahemik, mille kestel punkt teeb ühe täistiru. Vektori  $\vec{\omega}$  suund mööda trajektoori telge määratakse parema käe kruvi reegli järgi (joonisel 1:14 on see punktis  $O$  risti ringjoone tasapinnaga).

Nurkkiiruse  $\omega$  SI-ühikuks on  $\text{rad.s}^{-1}$  ehk  $\text{s}^{-1}$ . Kasutades nurkkiirust, piisab liikumise täielikuks iseloomustamiseks kahest suurusest  $R$  ja  $\vec{\omega}$ .

Vaadeldes kolme suurust  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{v}$  ja  $\vec{R}$ , näeme, et

$$v = \omega R \quad (1.17)$$

ning

$$\vec{r} = [\vec{\omega} \vec{R}], \quad (1.17')$$

s.o. et vektor  $\vec{r}$  on vektorite  $\vec{\omega}$  ja  $\vec{R}$  vektorkorrutis.

Ühtlase ringliikumise korral kirjutame liikumisvõrrandi samuti kui ühtlase sirgliikumise puhul (1.3):

$$S = S_0 + vt \quad (1.18)$$

Analoogilise liikumisvõrrandi võime kirjutada, kasutades punkti  $M$  raadiusvektori  $\vec{R}$  pöördenurka  $\vec{\varphi}$  ja selle pöörlemise nurkkiirust  $\vec{\omega}$  :

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}t, \quad (1.19)$$

kus  $\vec{\varphi}_0$  on nurk, mille võrra on  $\vec{R}$  pöördunud enne ajalugemise algust.

Võrrandi (1.19) võib kirjutada ka algebralisel kujul

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (1.19')$$

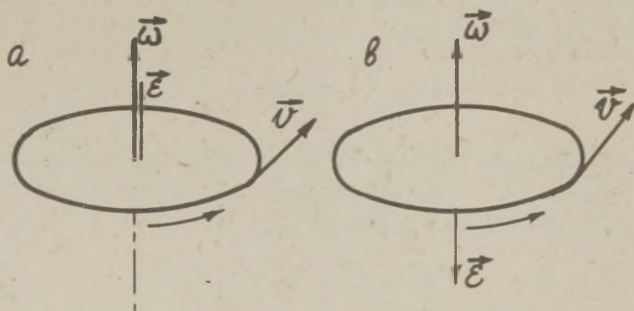
kus vektorite  $\vec{\varphi}$  ja  $\vec{\omega}$  kaks võimalikku suunda arvestatakse pluss- või miinusemärgiga.

2) Ühtlaselt kiirenev ringliikumine on liikumine mööda ringjoont jääva tangentsiaalkiirendusega  $a_t = \text{const}$ . Nii-  
suguse liikumise täielikuks iseloomustamiseks peab teadma trajektoori raadiust  $R$ , liikumise algkiirust (ajamomendil null)  $v_0$  ning tangentsiaalkiirenduse  $a_t$  algebralist väärtust. Teises variandis võib esitada tuntud suurustena trajektoori raadiuse  $R$ , nurkkiiruse algväärtuse  $\vec{\omega}_0$  ning raadiusvektori  $\vec{R}$  pöörlemise nurkkiirenduse  $\vec{\epsilon}$ .  $\vec{\epsilon}$  on aksiaalvektor, mille algebraline väärtus  $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$  ja

---

<sup>≡</sup> Analoogiliselt nurkkiirusega  $\vec{\omega}$  vaadeldakse pöördenurka  $\vec{\varphi}$  kui aksiaalvektorit.

suund ühtib  $\vec{\omega}$  suunaga viimase kasvades ning on sellega vastupidine nurkkiiruse kahanedes (joonisel 1:15 vastavalt a ja b).



Joon. 1:15.

Nurkkiiruse  $\mathcal{S}$  ühikuks on  $\text{rad.s}^{-2}$  ehk  $\text{s}^{-2}$ .

Liikumisvõrrandi kaks varianti antud liikumise korral on

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2} \quad (1.20)$$

ning

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (1.20')$$

Kiirus (või nurkkiirus) antud ajamomendil  $t$  avaldub järgmiselt:

$$v = v_0 + a_t t \quad (1.21)$$

ning

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (1.21')$$

### Ülesanne 1-1.

Trammivagun hakkab liikuma mööda sirget teed konstantse kiirendusega  $a = 0,3 \text{ m s}^{-2}$ . a) Kui palju aega kulub tal esimese ja kümnenda meetri läbimiseks? b) Määrata vaguni liikumiskiirus kumagi eespool mainitud teelõigu lõpus.

#### Lahendus.

Ühtlaselt kiireneva liikumise kiirus ja läbitud tee pikkus avalduvad:

$$v = at \quad ; \quad s = \frac{at^2}{2}$$

a) Kui  $s_1 = 1 \text{ m}$ , siis

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{0,3 \text{ m s}^{-2}}} = \underline{\underline{2,58 \text{ s}}}$$

Kümnenda meetri läbimiseks kuluv aeg:

$$t^* = t_{10} - t_1,$$

kusjuures

$$s_{10} = \frac{at_{10}^2}{2}, \quad s_1 = \frac{at_1^2}{2}$$

ning

$$t^* = \sqrt{\frac{2s_{10}}{a}} - \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2}{a}} (\sqrt{s_{10}} - \sqrt{s_1}),$$

$$t^* = \sqrt{\frac{2}{0,3 \text{ m s}^{-2}}} (\sqrt{10 \text{ m}} - \sqrt{1 \text{ m}}) = \underline{\underline{0,4 \text{ s}}}$$

b) Lõppkiirused:

$$v_1 = at_1 = 0,3 \text{ m s}^{-2} \cdot 2,58 \text{ s} = \underline{\underline{0,77 \text{ m s}^{-1}}},$$

$$v_{10} = at_{10} = \sqrt{2as_{10}} = \sqrt{2 \cdot 0,3 \text{ m s}^{-2} \cdot 10 \text{ m}} = \underline{\underline{2,45 \text{ m s}^{-1}}}$$

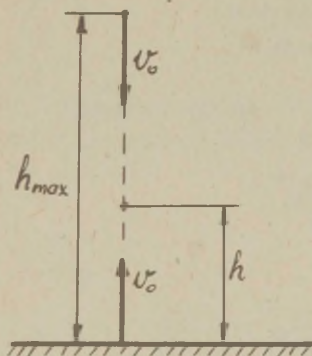


### Ülesanne 1-2.

Üks keha visatakse maapinnalt vertikaalse algkiirusega  $v_0 = 4,9 \text{ m s}^{-1}$ . Samal ajamomendil visatakse teine keha niisama suure algkiirusega  $v_0$  vertikaalselt alla punktist, mille kõrgus maapinnast on võrdne esimese keha tõusu maksimaalse kõrgusega  $h_{\max}$ .

Millisel ajamomendil  $t$  ning kui kõrgel  $h$  maapinnast need kehad kohtuvad? Määrata kummagi keha kiirused  $v_1$  ja  $v_2$  kohtumise momendil.

Laendus (joon. 1:16).



Joon. 1:16.

Kehade kiirused ning nende poolt läbitud teepikkused suvalisel ajamomendil  $t$  on järgmised.

Esimese keha puhul

$$v_1 = v_0 - gt; \quad s_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

ning teise keha puhul

$$v_2 = v_0 + gt; \quad s_2 = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

Esimese keha tõusu maksimaalse kõrguse määramise suhetest

$$v_0 = g t_{\max}$$

ja

$$h_{\max} = \frac{g t_{\max}^2}{2}$$

Elimineerinud  $t_{\max}$ , saame

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Kehade kiirused ning nende

### Kohtumise momendil

$$S_1 + S_2 = h_{\max},$$

S.O.

$$2v_0 t = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow t = \frac{v_0}{4g},$$

$$t = \frac{4,9 \text{ m s}^{-1}}{4 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} = \underline{\underline{0,125 \text{ s}}}$$

### Kohtumispunkti kõrgus maapinnast

$$h = S_1 = v_0 \frac{v_0}{4g} - \frac{g v_0^2}{2 \cdot 16g} = \frac{7v_0^2}{32g},$$

$$h = \frac{7 \cdot 4,9^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{32 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} = \underline{\underline{0,53 \text{ m}}}$$

Kehade kiirused kohtumispunktis:

$$v_1 = v_0 - \frac{g v_0}{4g} = \frac{3v_0}{4} = \underline{\underline{6,37 \text{ m s}^{-1}}},$$

$$v_2 = v_0 + \frac{g v_0}{4g} = \frac{5v_0}{4} = \underline{\underline{6,12 \text{ m s}^{-1}}}$$

### Ülesanne 1-3.

Ainepunkt liigub mööda sirgjoont nii, et tema kiirendus kasvab ühtlaselt, saavutades liikumise esimese kümne sekundi jooksul väärtuse  $a_{10} = 5 \text{ m s}^{-2}$ . Milline on selle punkti kiirus  $v_{10}$  ja tema poolt läbitud tee pikkus  $S_{10}$  liikumise kümnenda sekundi lõpul?

Lahendus.

Kiirenduse sõltuvuse ajast võib avaldada valemiga

$$a = k t,$$

kus

$$k = \frac{a_{10}}{t_{10}} = \frac{5 \text{ m s}^{-2}}{10 \text{ s}} = 0,5 \text{ m s}^{-3}$$

Kiirus

$$v = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t k t dt = \frac{k t^2}{2}$$

ning

$$v_{10} = \frac{k t_{10}^2}{2} = \frac{0,5 \text{ m s}^{-3} 10^2 \text{ s}^2}{2} = \underline{\underline{25 \text{ m s}^{-1}}}$$

Läbitud tee pikkus

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{k t^2}{2} dt = \frac{k t^3}{6}$$

ning

$$s_{10} = \frac{k t_{10}^3}{6} = \frac{0,5 \text{ m s}^{-3} 10^3 \text{ s}^3}{6} = \underline{\underline{83,3 \text{ m}}}$$

Ülesanne 1-4.

Ainepunkt hakkab liikuma mööda ringjoont raadiusega

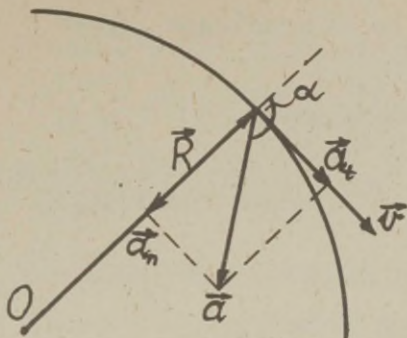
$R = 50 \text{ cm}$  nii, et tema raadiusvektori nurkkiirendus

$\varepsilon = 0,4 \text{ s}^{-2}$ . Määrata selle punkti kiirus  $v$ , kiirendus  $\vec{a}$  ning läbitud kaare pikkus  $s$  ajamomendil  $t = 2 \text{ s}$ .

Lahendus. (joon. 1:17).

Liikumise tangentsiaalkiirendus

$$a_t = \varepsilon R$$



Joon. 1:17.

Seega kiirus ajamomendil  $t$  :

$$v = a_t t = \varepsilon R t = 0,45^{-2} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 2 \text{ s} = \underline{\underline{0,4 \text{ m s}^{-1}}}$$

Kiirenduse normaalkomponent (1.13)

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

ning kogukiirendus

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \frac{v^4}{R^2}} = \\ &= \sqrt{0,16 \text{ s}^{-4} \cdot 0,25 \text{ m}^2 + \frac{0,4^4 \text{ m}^4 \text{ s}^{-4}}{0,25 \text{ m}^2}} = \underline{\underline{0,38 \text{ m s}^{-2}}} \end{aligned}$$

Vektori  $\vec{a}$  suuna võib määrata nurgaga  $\alpha$ , mille see vektor moodustab raadiusvektori  $\vec{R}$  suunaga:

$$\begin{aligned} \tan(\tilde{v} - \alpha) &= \frac{a_t}{a_n} = \frac{\varepsilon R^2}{v^2} = \\ &= \frac{0,45^{-2} \cdot 0,25 \text{ m}^2}{0,16 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 0,625, \end{aligned}$$



$$\alpha = 180^\circ - 32^\circ = \underline{\underline{148^\circ}}$$

Läbitud kaare pikkus

$$s = \frac{a_t t^2}{2} = \frac{\varepsilon R t^2}{2} = \frac{0,4 \text{ s}^{-2} 0,5 \text{ m } 4 \text{ s}^2}{2} = \underline{\underline{0,4 \text{ m}}}$$

## 2. AINEPUNKTI DÜNAAMIKA

### 2.1. Dünaamika põhiseadused

Jõud. Kehade liikumine on alati tingitud nende vastastikusest mõjust. Kui keha hakkab liikuma või lakkab liikumast, on see alati mõne teise keha mõju tulemus sellele kehale. Niisugust ühe keha mõju teisele nimetatakse jõuks. Jõud on põhjus, mis kutsub esile keha liikumisoleku muutuse, s.o. tema kiireneva liikumise. Ka on võimalik jõudusid mõõta (võrrelda) kiirenduste kaudu, mis nad tekitavad antud keha puhul. Praktikas mõõdetakse jõudusid sageli nende poolt esilekutsutud elastsete deformatsioonide kaudu.

Iga keha säilitab oma liikumisoleku (paigaloleku või ühtlase sirgeliikumise) seni, kuni temasse mõjuvad jõud seda ei muuda. Kolme väide on formuleeritud Newtoni<sup>III</sup> poolt esimese liikumiseadusena, mida sageli nimetatakse veel inertsiseaduseks, mõistes inertsia all kehade omadust säilitada oma olekut.

Kui üht keha mõjutada erinevate jõududega ning mõõta iga kord selle keha liikumise kiirendusi, selgub, et kiirendus  $\vec{a}$  ja jõud  $\vec{F}$  on samasuunalised vektorid, mille moodulid on võrdelised:

$$\vec{F} = \kappa \vec{a}$$

<sup>III</sup> Isaac Newton (1642-1727), inglise matemaatik, füüsik ja filosoof.

Viimane väide koos järgneva valemiga väljendab Newtoni teist liikumiseseadust.

Mass. Võrdetegur  $K$  selles valemis on vaadeldavale kehale omane karakteristik ning on võrdeline suurusega  $m$ , mida nimetatakse keha massiks:

$$\vec{F} = cm\vec{a}$$

Seega keha mass on suurus, mis iseloomustab selle keha vastupanu temale mõjuvatele jõududele. Üeldakse, et mass on keha inertsii mõõt, mõeldes inertsii all keha omadust säilitada oma liikumisolekut, s.o. paigalolekut või ühtlast sirglikumist. Keha mass on omakorda võrdeline temas sisalduva aine hulga, kuid samastada massi ja aine hulka ei saa. Küll aga saab määrata kehas sisalduvat aine hulka massi kaudu. Nii toimitaksegi, "kaaludes" kehi kangkaalude abil, kus tegelikult võrreldakse kahe keha (kaalutava keha ja etalonvihi või vihtide) masse.

Ühikute ratsionaalse valikuga saavutatakse eelnevalt kirjutatud valemis  $C=1$  ning siis

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

$SJ$ -s mõõdetakse massi kilogrammides.  $1\text{ kg}$  on rahvusvahelise kilogrammi etaloni mass. Sama mõõtühikutesüsteemi jõühikuks on njuton ( $N$ ).

Valemi (2.1) alusel

$$1N = 1\text{ kg} \cdot 1\text{ m s}^{-2}$$

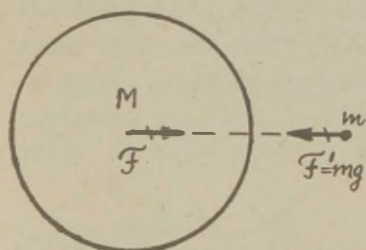
$1N$  on niisugune jõud, mis kehale massiga  $1\text{ kg}$  annab kiirenduse  $1\text{ m s}^{-2}$ .

$CGS$ -mõõtühikute süsteemis mõõdetakse jõudu düünides: düün on jõud, mis kehale massiga  $1\text{ g}$  annab kiirenduse  $1\text{ cm s}^{-2}$ :

$$1\text{ dyn} = 1\text{ g} \cdot 1\text{ cm s}^{-2}$$

Märkus. On selge, et inertsiseadus järeldub Newtoni II seadusest: kui  $F=0$ , siis ka  $a=0$  ning keha liikumise olek ei muutu. Seepärast nimetataksegi Newtoni II seadust dünaamika põhiseaduseks.

Ning veel üks dünaamika seadus - Newtoni III seadus, mis väidab, et igale mõjule (aktsioonile) on alati olemas võrdne ja vastassuunaline vastumõju (reaktsioon), teisiti väljendatult: kahe keha vastastikused mõjud (jõud) on võrdvastupidised. Niisiis, jõud esinevad alati paarikaupa. Kui mõnesse kehasse mõjub mingi jõud, leidub alati mõni teine keha, millesse mõjub esimesega suuruselt võrdne, kuid otse vastupidi suunatud jõud (joon.2:1 Maa (M) ja väike keha (m)).



Joon. 2:1.

Newton formuleeris dünaamika põhiseaduse, lähtudes keha liikumishulga mõistest. Keha liikumishulgaks nimetatakse selle keha massi  $m$  ja tema liikumiskiiruse  $\vec{v}$  korrutist

$$\vec{K} = m\vec{v}$$

See on kiirusega samasuunaline vektor. Liikumishulga ühikuks SI-s on  $kg\,m\,s^{-1}$ . (Liikumishulka nimetatakse ka impulsiks.)

Newton väitis, et keha liikumishulga muutus on võrdeline kehale mõjuva liikumapaneva jõuga ning toimub selle jõu suunas:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$$



ehk teisiti

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{mv}) \quad (2.1')$$

Sageli vaadeldakse mehaanikas veel ühte suurust, jõu impulssi, mille all mõistetakse jõu  $\vec{F}$  ja tema mõjumise aja  $dt$  korrutist. Jõuimpulss  $\vec{F}dt$  on jõusuunaline vektor, mille SI-mõõtühikuks on  $kg\,m\,s^{-1}$ .

Kasutades jõuimpulsi mõistet, võib võrrandi (2.1') kirjutada ümber kujul

$$\vec{F}dt = d(\vec{mv}) \quad (2.1'')$$

ning lugeda dünaamika põhiseadust järgmiselt. Keha liikumishulga muutus on võrdne temale mõjuva jõuimpulsiga.

Ainult sel juhul, kui keha mass  $m$  liikumise kestel ei muutu, võib valemi (2.1'') kirjutada kujul

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ehk

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (2.1''')$$

nagu see ülalpool on tehtud. Seega on algul valemiga (2.1) toodud dünaamika põhiseaduse formulatsioon õige vaid erandjuhul, kui  $m = \text{const.}$

## 2.2. Kehade liikumine seoste korral

Vaadeldud juhtudel oli tegemist keha (ainepunkti) vaba liikumisega. Vabaks nimetatakse keha liikumist antud jõudude mõjul, ilma et oleks eelnevalt tehtud mingeid kitsendusi trajektoori või kiiruse suhtes. Keha vaba liikumine

algab teatud kohast antud algkiirusega.

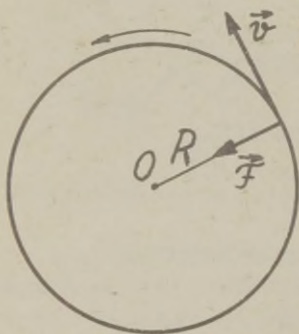
Tihti aga tuleb tegemist niisuguste juhtudega, kus need trajektoori või kiirust määravad tingimused (nn. s e o - s e d) esinevad. Nii on see näiteks paela otsa kinnitatud kuulikese liikumisel mööda ringjoont, keha libisemisel mööda kaldpinda, kera veeremisel mööda horisontaalpinda jne.

Seoste olemasolu tingimustes mõjuvad kehale peale teadaolevate väliste jõudude veel nn. seoste reaktsioonid, s.o. jõud, mida avaldavad seost teostavad kehad (pael, kaldpind) ning mis esialgu on tundmatud.

Nende määramiseks peab koostama vajaliku arvu lisavõrrandeid, lähtudes kas etteantud trajektoori kujust või kindlaks-määratud kiiruse väärtusest ja suunast vms.

Üldiselt on dünaamika ülesannete lahendamine väga lihtne - tuleb vaid tähistada tuntud ja tundmatud suurused, ning kasutada Newtoni II ja III seadust, koostada vajalik arv võrrandeid, mis määraksid liikumise ja seoste reaktsioonid.

Näide 1. Ringliikumine. Vaatleme paela otsa kinnitatud kuulikese tiirlemist horisontaaltasandis (üंबर vertikaalse telje  $O$ ) (joon. 2:2). Niisugusel juhul on tavaliselt tea-



Joon. 2:2.

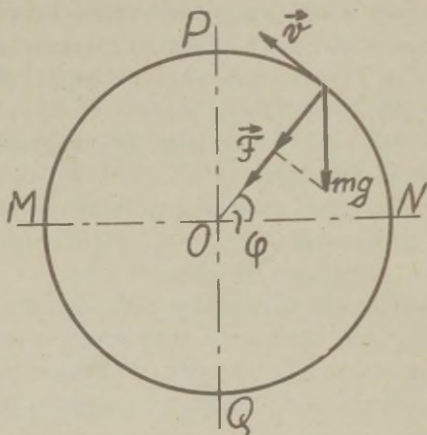
da paela pikkus (trajektoori raadius)  $R$ , kuulikese mass  $m$  ning kuulikese kiirus  $v$  (või paela pöörlemise nurkkiirus  $\omega$ ). Paela mõju  $F$  kuulikesele (seose reaktsiooni) saab määrata nende suuruste kaudu. Teades tsentripetaalkiirenduse avaldist (1.13)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,$$

saame

$$F = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

Ülesanne osutub veidi keerukamaks, kui vaadelda sama kuulikest  $m$  tiirlemist vertikaaltasandis konstantse kiirusega  $v$  (või konstantse nurkkiirusega  $\omega$ ) ümber horisontaaltelje  $O$  (joon. 2:3). Niisugusel juhul annab kuulikesele



Joon. 2:3.

mõjuv raskusjõud oma penuse, mistõttu seose (paela) reaktsioon  $F$  pole enam konstantne suurus:

$$F = \frac{mv^2}{R} - mg \sin \varphi$$

ehk

$$F = \frac{mv^2}{R} - mg \sin \omega t,$$

kui liikumise lähtepunktiks on  $N$ .

On selge, et reaktsiooni  $F$  minimaalne väärtus

$$F_{\min} = \frac{mv^2}{R} - mg$$

vastab ülemisele asendile  $P$  ning maksimaalne väärtus

$$F_{\max} = \frac{mv^2}{R} + mg$$

alumisele asendile  $Q$ .

Näide 2. Keha liikumine mööda ideaalset kaldpinda. Ideaalseteks nimetatakse seoseid, mille korral keha liigub mööda antud pinda hõõrdumiseta (seose reaktsioon on alati pinna normaali suunaline).

Ideaalsel kaldpinnal asuval kehal massiga  $m$  mõjub kaks jõudu: tema raskus  $\vec{P}$  ja kaldpinna reaktsioon  $\vec{N}$ , mis on risti kaldpinnaga (joon. 2:4). Lahutanud keha raskuse  $\vec{P}$  kaheks komponendiks  $P\cos\alpha$  ja  $P\sin\alpha$  ning arvestades, et keha liigub ainult piki kaldpinda, võib kirjutada

$$\vec{N} + P\cos\alpha = 0$$

ehk

$$\vec{N} = -P\cos\alpha$$

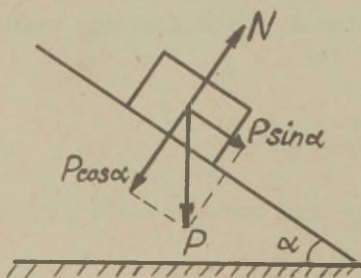
Reaktsioon  $N$  ei mõjuta keha kiirendust selle liikudes

mööda kaldpinda, kuid ta tingib liikumise mööda seda pinda. Kiirenduse määrab kaldpinnaga paralleelne raskusjõu komponent  $P\sin\alpha$ :

$$\frac{mdv}{dt} = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$$

ning

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha$$

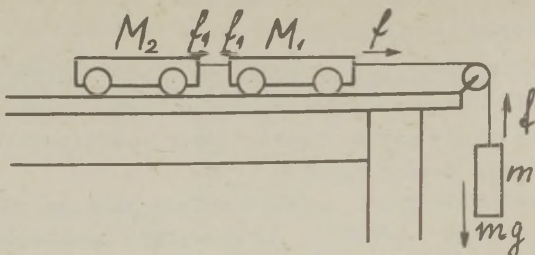


Joon. 2:4.

Vaadeldud juhul reaktsioonijõud ei muutu keha liikumisel, see sõltub ainult kehale mõjuvast raskusjõust ja pinna kaldenurgast.

Näide 3. Üksteisega seotud vankrikest liikumine mööda horisontaalset tasapinda rippuva koormuse mõjul. Joonisel 2:5 kujutatud süsteemis on  $M_1$  ja  $M_2$  vankrikestel massid ning  $m$  rippuva keha mass. Oletades, et niidid on





Joon. 2:5.

venimatud ja liikumine hõõrdumiseta, ning jättes arvestamata niitide ja ploki massid, määrata süsteemi kiirendus  $a$  ja niitide tõmbed  $f$  ja  $f_1$ .

Dünaamika põhiseadus võimaldab kirjutada kolmest võrrandist koosneva süsteemi

$$\left. \begin{aligned} ma &= mg - f \\ M_1 a &= f - f_1 \\ M_2 a &= f_1 \end{aligned} \right\}$$

Lahendanud selle võrrandsüsteemi, saame ülesande vastused:

$$a = \frac{mg}{m + M_1 + M_2},$$

$$f_1 = \frac{m M_2 g}{m + M_1 + M_2},$$

$$f = \frac{m (M_1 + M_2) g}{m + M_1 + M_2}$$

Saadud tulemustest nähtub, et süsteem liigub jääva kiirendusega, tema kiirus  $v$  aga on määratud veel algtingimustega (algkiirusega  $v_0$ ) ning sõltub ajast:

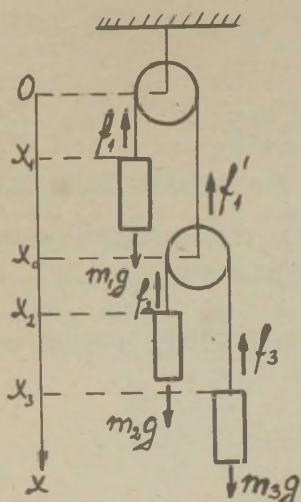
$$v = v_0 + at$$

Näide 4. Plokkidel rippuvate kehade liikumine. Olgu üles-

anne püstitatud järgmiselt:  
määrata joonisel 2:6 kujuta-  
tud süsteemi kehade kiirenda-  
sed ja niitide reaktsioonid  
eeldusel, et niidid on veni-  
matud ning nii plokid kui ka  
niidid kaalutud.

Dünaamika põhiseadus (2.1)  
võimaldab kirjutada kolm võr-  
randit

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= m_1 g - f_1 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= m_2 g - f_2 \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= m_3 g - f_3 \end{aligned} \right\} \text{(I)}$$



Joon. 2:6.

Kuna plokid on kaalutud,

siis

$$f_2 = f_3$$

ja

$$f_1 = f_1' = f_2 + f_3 \quad \text{(II)}$$

Jääb üle võtta arvesse veel seoste poolt määratud tingimused

$$\left. \begin{aligned} x_0 + x_1 + \pi r &= l_1 \\ x_2 - x_0 + x_3 - x_0 + \pi r &= l_2 \end{aligned} \right\},$$

kus  $r$  on kumagi plokiratta raadius ning  $l_1$  ja  $l_2$  niitide pikkused.

Kahest viimasest seosest järgneb:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2l_1 + l_2 - 3\bar{w}_2$$

Diferentseerides saadud võrrandit kaks korda, leiame tingimuse

$$2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{d^2 x_3}{dt^2} = 0, \quad (\text{III})$$

mis seob kehade kiirendusi.

Lahendanud kuuest võrrandist (I), (II) ja (III) koosneva süsteemi, leiame kõik kuus otsitavat suurust:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{(m_1 m_2 - 4 m_2 m_3 + m_1 m_3) g}{4 m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3},$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{(4 m_2 m_3 + m_1 m_2 - 3 m_1 m_3) g}{4 m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3},$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = \frac{(m_1 m_3 - 3 m_1 m_2 + 4 m_2 m_3) g}{4 m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3}$$

ning

$$f_1 = \frac{8 m_1 m_2 m_3 g}{4 m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3},$$

$$f_2 = f_3 = \frac{4 m_1 m_2 m_3 g}{4 m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3}$$

### 2.3. Liikumishulga jäävuse seadus

Mehaaniline süsteem. Kaks (või enam) keha moodustavad mehaanilise süsteemi, kui nende kehade vastastikune mõju ja liikumine on

määratud mehaanika seadustega. Jõud, mis mõjuvad niisuguses süsteemis, liigituvad seesmisteks (süsteemi kuuluvate kehade vahelised jõud) ja välisteks (vaadeldavasse süsteemi kuuluvatele kehadele väljastpoolt avaldatavad jõud). Kui välised jõud puuduvad, nimetatakse süsteemi isoleerituks.

Süsteemi liikumishulk on sellesse süsteemi kuuluvate kehade liikumishulkade geomeetriline summa. Kui süsteemi kuuluvate kehade massid on  $m_1, m_2, \dots, m_n$  ning nende kiirused vastavalt  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , siis süsteemi liikumishulk

$$\vec{K} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n$$

ehk

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

On lihtne tõestada, et isoleeritud süsteemi liikumishulk on jääv suurus.

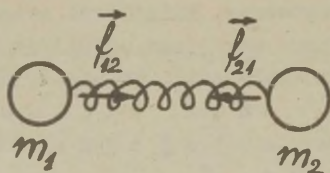
Lihtsuse mõttes vaatleme kahest kehast koosnevat süsteemi (näiteks kahte kuulikest, ühendatud vedruga (joon. 2:7), mille massi loeme tähtsusetult väikeseks). Kui niisugusele süsteemile ei mõju välised jõud (näit. kuulikesed on asetatud ideaalsele horisontaalsele tasapinnale), siis on ainsaks mõjuks vedru vahendusel edasiantud kehade omavaheline mõju, kusjuures Newtoni III seaduse alusel

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Kirjutame kummagi keha puhul dünaamika põhiseaduse (2.1'):

$$\vec{f}_{12} = \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1)$$





Joon. 2:7.

ja

$$\vec{f}_{21} = \frac{d}{dt} (m_2 \vec{v}_2)$$

Liitnud need võrrandid, saame

$$\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} =$$

$$= \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1) + \frac{d}{dt} (m_2 \vec{v}_2)$$

Kuna

$$\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = 0,$$

siis ka

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1) + \frac{d}{dt} (m_2 \vec{v}_2) = 0$$

ning samuti

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0$$

Seega ei muuda kahest kehast koosneva süsteemi puhul nende kehade vahel mõjuvad süsteemisisesed jõud kogu süsteemi liikumishulka.

Kui süsteem koosneb  $n$  kehast:

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$$

ning süsteemisisesed jõud on

$$\begin{aligned}
 &\vec{f}_{12}, \vec{f}_{13}, \dots, \vec{f}_{1n} \\
 &\vec{f}_{21}, \vec{f}_{23}, \dots, \vec{f}_{2n} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\vec{f}_{n1}, \vec{f}_{n2}, \dots, \vec{f}_{n, n-1},
 \end{aligned}$$

kusjuures kõik  $\vec{f}_{ik}$  ja  $\vec{f}_{ki}$  jõudude paarid on võrdvastupidised

$$\vec{f}_{ki} = -\vec{f}_{ik},$$

siis, kirjutanud kõikide kehade kohta dünaamika põhiseaduse (2.1'):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) &= \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \dots + \vec{f}_{1n} \\
 \frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) &= \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \dots + \vec{f}_{2n} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) &= \vec{f}_{n1} + \vec{f}_{n2} + \dots + \vec{f}_{n, n-1}
 \end{aligned}$$

ning summeerides need võrrandid, saame

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) = 0$$

ehk

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = 0$$

$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{K}$  on süsteemi liikumishulk. Seega

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = 0$$

ja

$$\vec{K} = \text{const}$$

Nii järeldub Newtoni II ja III seadusest isoleeritud süsteemi liikumishulga jäävus.

#### 2.4. Muutliku massiga keha liikumine

Vaatleme muutliku massiga keha (näiteks gaase väljapaistava raketi) liikumist välise jõu  $\vec{F}$  mõjul (joon. 2:8). Olgu ajamomendil  $t$  selle keha mass  $M$  ja tema kiirus  $\vec{v}$  ning muutugu selle keha mass seaduse järgi

$$-\frac{dM}{dt} = \mu,$$

kus  $\mu$  on massi muutumise (vähenemise) kiirus.

Massi jäävuse seadus väljendub niisugusel juhul võrrandiga

$$dM + \mu dt = 0,$$

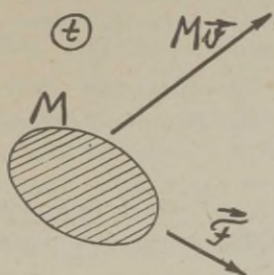
kus  $-dM$  on põhikeha (raketi) massi muutus (vähenemine) ajavahemikus  $dt$  ning  $\mu dt$  - samal ajavahemikul põhikehast (raketist) eraldunud aine (gaaside) mass.

Ajamomendil  $t$  on põhikeha (raketi) liikumishulk  $M\vec{v}$ .

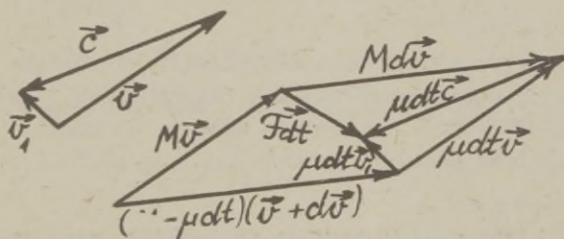
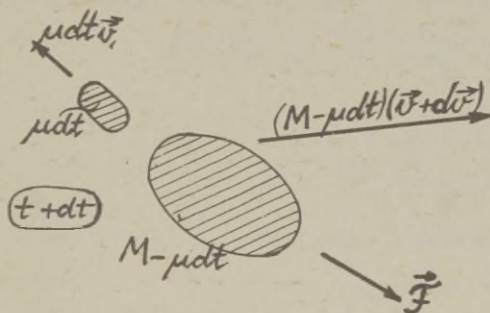
Jõu  $\vec{F}$  ning väljapaistava gaasijoa mõju tulemusena ajamomendil  $t+dt$  on raketi mass  $M - \mu dt$ , tema kiirus  $\vec{v} + d\vec{v}$  ning liikumishulk  $(M - \mu dt)(\vec{v} + d\vec{v})$ .

Kui raketist väljapaistavate gaasiosakeste kiirus raketi suhtes on  $\vec{c}$  ning seega gaasijoa kiirus Maa suhtes

a) ajaminomendil  $t$



b) ajaminomendil  $t + dt$



Joon. 2:8.



$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{c}$ , siis ajavahemikus  $dt$  väljapaisatud gaasi liikumishulk momendil  $t+dt$  on  $\mu dt \vec{v}_1$ .

Kogu süsteemi liikumishulga muutus ajavahemikus  $dt$  on

$$\begin{aligned} (M - \mu dt)(\vec{v} + d\vec{v}) + \mu dt \vec{v}_1 - M\vec{v} = \\ = M d\vec{v} + \mu dt (\vec{v}_1 - \vec{v}) - \mu dt d\vec{v} \end{aligned}$$

Loobunud teist järku väikesest suurusest  $\mu dt d\vec{v}$ , võime antud süsteemi kohta kirjutada dünaamika põhiseaduse kujul

$$M d\vec{v} + \mu dt (\vec{v}_1 - \vec{v}) = \vec{F} dt$$

Siit järgneb

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \mu (\vec{v} - \vec{v}_1)$$

Et aga

$$\vec{v} - \vec{v}_1 = -\vec{c},$$

siis

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \mu \vec{c} \quad (2.2)$$

Saadud seost (2.2) nimetatakse Meštšerski<sup>§</sup> võrrandiks ning see väljendab dünaamika põhiseadust niisugusel üldisel juhul, kus  $M \neq \text{const}$ . Sellest nähtub, et reaktiivjõud on vastassuunaline gaasijoa kiirusele.

---

<sup>§</sup> Meštšerski, Ivan Vsevolodovitš (1859–1935), vene teadlane-mehaanik.

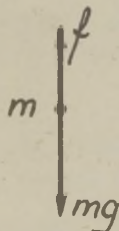
Kui rakett liigub Maa läheduses, mõjuvad temale välise jõududena raskusjõud  $Mg$  ja õhutakistus  $R$  ning lisaks nendele muidugi veel reaktiivjõud  $-Mc$ . Siit järgneb võimalus reguleerida raketi liikumise suunda, muutes reaktiivjõudu.

Siin vaadeldud viisil või analoogiliselt tekitatud reaktiivjõudusid kasutatakse nn. reaktiivliikumise allikana. Käesoleval ajal on suure tähtsusega mitmesugused reaktiivmootorid lennukite jaoks ning eriti reaktiivlennud kosmoses. Reaktiivlennu pioneeriiks oli Tsiolkovski<sup>2</sup>, kes arendas reaktiivlennu teooriat ning töötas välja mitmesuguste lennuparaatide konstruktsioonid. Tsiolkovskile kuulub ka planeetidevaheliste lendude idee.

### Ülesanne 2-1.

Keha, mille mass  $m = 5 \text{ kg}$ , langeb vertikaalselt kiirendusega  $a = 6 \text{ m/s}^2$ . Määrata õhutakistus  $f$  keha liikumisele.

Lahendus (joon. 2:9).



Keha liikuma panev jõud

$$F = mg - f$$

Dünamika põhiseaduse järgi (2.1)

$$mg - f = ma,$$

kust

$$f = m(g - a),$$



Joon. 2:9.

$$f = 5 \text{ kg} (9,81 - 6) \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{19 \text{ N}}}$$

\* Tsiolkovski, Konstantin Eduardovitš (1857-1935), vene teadlane ja leidur.

### Ülesanne 2-2.

Vaba keha massiga  $m$  liigub konstantse jõu  $F$  mõjul. Kui palju aega kulub selleks, et keha kiirus suureneks  $n$  korda, alates suvaliselt valitud väärtusest  $v_0$ ?

#### Lahendus.

Newtoni II seaduse järgi

$$F \Delta t = mv - mv_0$$

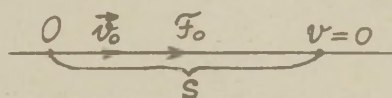
Et  $v = nv_0$ , siis

$$\Delta t = \frac{nmv_0 - mv_0}{F} = \frac{mv_0(n-1)}{F}$$

### Ülesanne 2-3.

Keha massiga  $m = 10 \text{ kg}$  liigub muutliku jõu  $F$  mõjul, mille sõltuvus ajast  $t$  väljendub valemiga  $F = p(q - t)$ , kus  $p = 10 \text{ kg s}^{-1}$  ning  $q = 1 \text{ s}$ . Millise aja möödudes jääb see keha seisma, kui tema algkiirus  $v_0 = 0,2 \text{ m s}^{-1}$  ning liikumise algmomendil on jõud ja kiirus samasuunalised? Kui pika tee läbib keha kuni seismajäämiseni?

#### Lahendus (joon. 2:10).



Joon. 2:10.

Dünaamika põhiseaduse (2.1) alusel

$$m \frac{dv}{dt} = p(q - t)$$

Integreerides saame kiiruse avaldise

$$v = \frac{p}{m} \left( qt - \frac{t^2}{2} \right) + v_0$$

Seismajäämise momendil  $v = 0$  ning

$$\frac{p}{m} \left( qt - \frac{t^2}{2} \right) + v_0 = 0,$$

mis taandub võrrandiks

$$t^2 - 2qt - \frac{2mv_0}{P} = 0$$

Lahendanud saadud ruutvõrrandi, leiame

$$t_1 = 2,02 \text{ s},$$

$$t_2 = -0,02 \text{ s}$$

Kuna negatiivsele lahendile ei saa omistada mingit füüsilist sisu, siis on ülesande ainsaks vastuseks

$$\underline{\underline{t = 2,02 \text{ s}}}$$

Keha poolt läbitud tee leidmiseks lähtume võrrandist

$$\frac{ds}{dt} = \frac{P}{m} \left( qt - \frac{t^2}{2} \right) + v_0,$$

mille integreerimine annab

$$s = \frac{P}{m} \left( q \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) + v_0 t$$

Asendades  $t = 2,02 \text{ s}$  , saame

$$\underline{\underline{s = 7,07 \text{ m}}}$$

#### Ülesanne 2-4.

Keha massiga  $m$  liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega  $v_0$  . Pidurdamisel peab see keha seisma jääma, läbinud tee  $S_0$  . Pidurdav jõud  $F$  muutub lineaarselt kiirusega ning liikumise lõpul, kui keha juba seisma on jäänud, ei tohi tema väärtus ületada poolt oma algväärtusest. Määrata  $F_0$  .



### Lehendus.

Sõltavuse  $F = F(v)$  avaldamisel peab arvestama, et algmomendil, kui kiirus on  $v_0$ , on  $F$  väärtuseks  $F_0$  ning lõpus, kui  $v = 0$ , on  $F = \frac{F_0}{2}$ , seega

$$F = \frac{F_0}{2} \left(1 + \frac{v}{v_0}\right)$$

Dünaamika põhiseaduse peame kirjutama kujul

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{F_0}{2} \left(1 + \frac{v}{v_0}\right)$$

Võttes arvesse, et  $v = \frac{ds}{dt}$ , seega  $dt = \frac{ds}{v}$ , saame eelmise võrrandi kirjutada ümber alljärgnevalt:

$$\frac{m dv}{ds} = - \frac{F_0}{2} \left(1 + \frac{v}{v_0}\right),$$

kust

$$- \frac{2m}{F_0} \frac{v dv}{1 + \frac{v}{v_0}} = ds$$

Integreerides kogu liikumise ulatuses, saame

$$\frac{2m v_0}{F_0} \left[ v - v_0 \ln(v + v_0) \right]_0^{v_0} = S_0$$

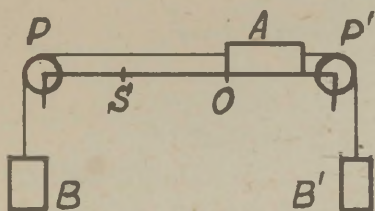
ehk

$$\frac{2m v_0^2}{F_0} (1 - \ln 2) = S_0$$

ning siit

$$\underline{\underline{F_0 = \frac{2m v_0^2}{S_0} (1 - \ln 2)}}$$

Ülesanne 2-5 (joon. 2:11).



Joon. 2:11.

Keha  $A$  massiga  $M = 1660\text{g}$  on asetatud pikale horisontaalsele lasele ning ühendatud kahe paela abil kehadega  $B$  ja  $B'$ , mis ripuvad vabalt ning mille massid on vastavalt  $m = 490\text{g}$  ja  $m' = 300\text{g}$ . Paelte ning plokkide  $P$  ja

$P'$  massid, samuti ka kõik hõõrdejõud lugeda tähtsusetult väikesteks.

Lastud vabaks, hakkab süsteem liikuma ühtlaselt kiirenevalt.

1. Määrata selle liikumise kiirendus.
2. Arvutada paeltele  $AB$  ja  $AB'$  mõjuvad tõmbejõud ning määrata otseselt nende tõmbejõudude vahe.
3. Arvutada aeg, mille kestel keha  $A$ , hakates liikuma paigalseisust punktis  $O$ , jõuab punkti  $S$ , kui  $OS = s = 21\text{g cm}$ . Määrata punkti  $S$  läbimise kiirus.
4. Mõeldil, kui keha  $A$  on punktis  $S$ , teda kehaga  $B$  ühendav pael katkeb. Milline on süsteemi  $A, B'$  edasine liikumine? Millise aja kestel, arvates lähtepunktist  $O$ , jõuab keha  $A$  samasse punkti tagasi?
5. Arvutada paela  $AB'$  tõmme pärast paela  $AB$  katkemist.

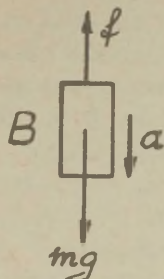
Lahendus.

1. Süsteemi kiirenduse arvutame, lähtudes dünaamika põhiseadusest

$$a = \frac{(m - m')g}{M + m + m'} = \frac{0,190\text{kg} \cdot 9,81\text{ms}^{-2}}{2,450\text{kg}} = \underline{\underline{0,76\text{ms}^{-2}}}$$

Keha  $A$  liikumise suund on paremalt vasakule.

2. Paelale  $AB$  mõjuva tõmbejõu  $f$  arvutame, rakendades kehale  $B$  dünaamika põhiseaduse (joon. 2:12).



Joon. 2:12.

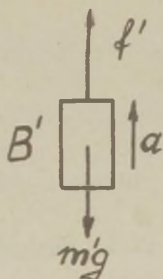
$$ma = mg - f,$$

siit

$$f = m(g - a) =$$

$$= 0,490 \text{ kg } 9,04 \text{ m s}^{-2} = \underline{\underline{4,44 \text{ N}}}$$

Paelale  $AB'$  mõjuva tõmbejõu  $f'$  arvutame analoogiliselt, rakendades dünaamika põhiseaduse kehale  $B'$  (joon. 2:13).



Joon. 2:13.

$$m'a = f' - m'g,$$

$$f' = m'(g + a) = 0,300 \text{ kg } 10,6 \text{ m s}^{-2} =$$

$$= \underline{\underline{3,18 \text{ N}}}$$

Tõmbejõudude  $f$  ja  $f'$  vahe  $f - f'$  saab määrata otseselt, vaadeldes keha  $A$  liikumist:

$$Ma = f - f'$$

Siit

$$f - f' = 1,66 \text{ kg } 0,76 \text{ m s}^{-2} = \underline{\underline{1,26 \text{ N}}}$$

On kerge veenduda, et viimane tulemus on kooskõlas kahe eelnevaga:

$$f - f' = 4,44 \text{ N} - 3,18 \text{ N} = \underline{\underline{1,26 \text{ N}}}$$

3. Teelõigu  $S$  läbimise aja määrame võrrandist

$$S = \frac{at^2}{2},$$

kust

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,19 \text{ m}}{0,76 \text{ ms}^{-2}}} = \underline{\underline{2,40 \text{ s}}}$$

Kiirus punktis  $S$  :

$$v = at = 0,76 \text{ ms}^{-2} \cdot 2,40 \text{ s} = \underline{\underline{1,82 \text{ ms}^{-1}}}$$

4. Kui pael  $AB$  katkeb, jääb mõjuma ainult jõud  $m'g$  ning süsteem hakkab liikuma vasakult paremale suunatud kiirendusega

$$a' = \frac{m'g}{M+m'} = \frac{0,300 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}}{1,96 \text{ kg}} = \underline{\underline{1,50 \text{ ms}^{-2}}}$$

Esialgu on liikumine aeglustuv ning momendist, kus kiirus on saanud nulliks, algab kiirenev liikumine suunaga vasakult paremale. Selle liikumise esimene etapp kestab

$$t' = \frac{v}{a'} = \frac{1,82 \text{ ms}^{-1}}{1,50 \text{ ms}^{-2}} = \underline{\underline{1,21 \text{ s}}}$$

ning selle aja jooksul läbitud tee

$$s' = \frac{vt'}{2} = \frac{1,82 \text{ ms}^{-1} \cdot 1,21 \text{ s}}{2} = \underline{\underline{1,10 \text{ m}}}$$

Selleks momendiks on keha läbinud tee pikkusega

$$S + s' = \underline{\underline{3,29 \text{ m}}}$$

ning siit alates liigub keha kiirendusega  $a'$  paremale. Lähtepunkti  $O$  jõudmise aja  $t''$  määrame võrrandist



$$s + s' = \frac{a' t'^2}{2}$$

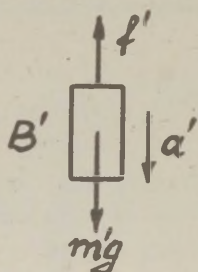
Siit

$$t'' = \sqrt{\frac{2(s+s')}{a'}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,29 \text{ m}}{1,50 \text{ m s}^{-2}}} = \underline{\underline{2,11 \text{ s}}}$$

Summaarne liikumise aeg

$$t + t' + t'' = \underline{\underline{5,72 \text{ s}}}$$

5. Pärast paela AB katkemist (joon. 2.14)



kust

$$m'a' = m'g - f_1'$$

$$f_1' = m'(g - a') =$$

$$= 0,300 \text{ kg} \cdot 8,30 \text{ m s}^{-2} = \underline{\underline{2,49 \text{ N}}}$$

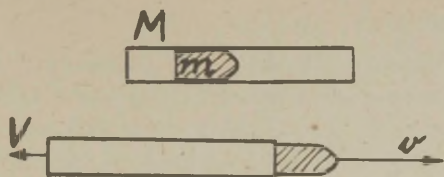
Joon. 2:14.

### Ülesanne 2:6.

Kahurit massiga  $M = 1000 \text{ kg}$  tulistatakse mürsuga, mille mass  $m = 10 \text{ kg}$ , kusjuures mürsu algkiirus  $v = 800 \text{ m s}^{-1}$ . Määrata kahuri tagasilöögi algkiirus  $V$ .

Lahendus (joon. 2:15).

Vaatleme kahurit ja mürsku isoleeritud süsteemina.



Enne lasku on süsteemi liikumishulk null,

pärast mürsu väljumist liikumishulk =  $M\vec{V} + m\vec{v}$ .

Joon. 2:15.

Liikumishulga jäävuse seaduse järgi

$$M\vec{V} + m\vec{v} = 0,$$

kust

$$\vec{V} = \frac{m\vec{v}}{M}$$

$$V = \frac{10 \text{ kg } 800 \text{ ms}^{-1}}{1000 \text{ kg}} = \underline{\underline{8 \text{ ms}^{-1}}}$$

**Märkus.** Olgu vaadeldava isoleeritud süsteemi massakese punktis  $G$ . Omistame süsteemi kogu liikumishulga masskeskmele, kuhu on mõeldud koondatuna kogu mass  $M+m$  ning mis liigub kiirusega  $\vec{v}'$ , siis

$$M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\vec{v}'$$

Et  $M\vec{V} + m\vec{v} = 0$ , siis  $v' = 0$

Niisiis süsteemi kahur - mürsk masskese ei muuda oma asendit Maa suhtes.

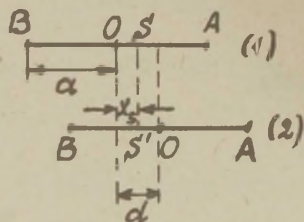
### Ülesanne 2-7.

Seisval veel liikumatult oleva paadi ühes otsas asub inimene. Kui palju nihkub paat veepinnal, kui inimene läheb paadi teise otsa? Paadi mass on  $M$ , inimese mass  $m$  ning paadi pikkus  $\ell = 2a$ .

### Lehendus.

Vaatleme süsteemi paat - inimene isoleerituna (lugedes

veetakistuse paadi liikumisel tähtsusetult väikeseks) ning lahendamise ülesande süsteemi massikeskme liikumatuse seisukohalt. Kui lähteasendis 1 (joon.2:16) asus inimene paadi parempoolses otsas  $A$ , siis kogu süsteemi massikeske oli



Joon. 2:16.

Massikeskme koordinaadi  $x_s$  võime kirjutada üldtuntud kujul

$$x_s = \frac{am}{M+m},$$

seega

$$\underline{\underline{d = 2a \frac{m}{M+m}}}$$

### Ülesanne 2-8.

Algul paigal olnud rakett hakkab välja paiskama gaase ühtlase joena kiirusega  $C = 300 \text{ m/s}$  raketi suhtes. Sekundi kestel väljub raketist  $\mu = 90 \text{ g}$  gaase. Raketi algnass  $M_0 = 270 \text{ g}$ .

1. Kui pika aja möödudes saavutab rakett kiiruse  $v_1 = 40 \text{ m/s}$ ?
2. Millise kiiruse  $v_2$  saavutab rakett, kui laengu mass oli  $m_0 = 180 \text{ g}$ ?

Õhutakistus jätta arvestamata.

### Lahendus.

Lugedes raketti isoleeritud süsteemiks, võime kirjutada liikumishulga jäävuse seaduse ajavahemikus  $t, t+dt$  kujul

$$(M_0 - \mu t) dv - \mu c dt = 0,$$

kust

$$\frac{\mu c}{M_0 - \mu t} dt = dv$$

Integreerides ajavahemikus  $0 \rightarrow t$ , saame

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{\mu c dt}{M_0 - \mu t} = -c \ln \frac{M_0 - \mu t}{M_0}$$

$$1) \quad -\frac{v_1}{c} = \ln \frac{M_0 - \mu t_1}{M_0},$$

kust

$$t_1 = \left(1 - e^{-\frac{v_1}{c}}\right) \frac{M_0}{\mu} = \underline{\underline{0,375 \text{ s}}}$$

$$2) \quad \mu t_2 = m_0,$$

$$-\frac{v_2}{c} = \ln \frac{M_0 - \mu t_2}{M_0} = \ln \frac{M_0 - m_0}{M_0}$$

kust

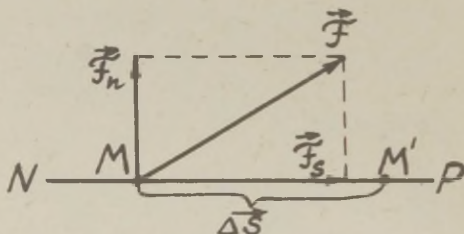
$$\underline{\underline{v_2 = 330 \text{ ms}^{-1}}}$$



### 3. TÖÖ. ENERGIA

#### 3.1. Töö

Kui mingi konstantse jõu  $\vec{F}$  (joon. 3:1) rakenduspunkt



Joon. 3:1.

nihkub mööda sirget  $NP$   $MM' = \Delta S$  võrra, kusjuures jõu ja nihkevektori  $\vec{\Delta S}$  suunad moodustavad nurga  $\alpha$ , siis jõud  $\vec{F}$  sooritab töö

$$\Delta A = F \Delta S \cos \alpha \quad (3.1)$$

ehk

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \vec{\Delta S}$$

Seega on töö vektorite  $\vec{F}$  ja  $\vec{\Delta S}$  skalaarne korrutis.

Valemit (3.1) analüüsides näeme, et

1) kui  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , siis  $\Delta A > 0$ .  $\vec{F}$  on siisugusel juhul liikumist tekitav jõud;

2) kui  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ , siis  $\Delta A < 0$ .  $\vec{F}$  esineb sel juhul liikumist takistava jõuna;

3) kui  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , siis  $\Delta A = 0$ . Seega jõu rakenduspunkti liikudes risti jõu suunaga jõud tööd ei tee.

$F \cos \alpha = F_s$  on jõu  $\vec{F}$  projektsioon liikumisuunale, seega

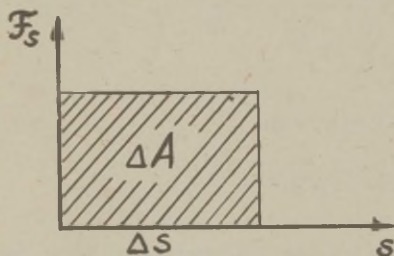
$$\Delta A = F_s \Delta s \quad (3.1')$$

Jõu  $\vec{F}$  teise, liikumissuunaga risti oleva komponendi  $F \sin \alpha = F_n$  töö  $\Delta A' = \vec{F}_n \Delta \vec{s} = 0$ . Niisiis, "töötavaks" komponendiks on liikumissuunaline jõu komponent  $F_s$ .

Graafikul  $F_s(s)$  (joon. 3:2) avaldub töö pindalana,

mida piiravad koordinaatteljed, sirge  $F_s(s)$  ning punktist  $\Delta s$  tõmmatud ordinaat.

Kui  $\vec{F} \neq \text{const}$  (muutuda võivad nii jõu moodul kui ka suund), tuleb tehtavat tööd arvutades vaadelda seda elementide  $dA$  kaupa ning jagada teelõik  $\Delta s$  elementaarlõikudeks



Joon. 3:2.

$ds$ . Siis

$$dA = F_s ds,$$

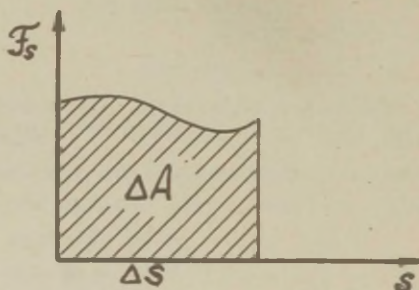
kus  $F_s$  on endiselt jõu  $\vec{F}$  projektsioon suunale  $ds$  ja

$$\Delta A = \int_0^{\Delta s} F_s ds \quad (3.2)$$

Graafikul  $F_s(s)$  (joon. 3:3) avaldub töö viirutatud pindalana.

Tööühikuks  $J$ -s on džaul ( $J$ ), s.o. töö, mille teeb jõud üks newtoon, kui selle rakenduspunkt nihkub ühe meetri võrra jõu suunas:

$$1J = 1N \cdot 1m = 1kgms^{-2}$$



Joon. 3:3.

$CGS$ -süsteemis mõõdetakse tööd ergides:

$$1erg = 1dyn \cdot 1cm = 1gcm s^{-2}$$

Peale džauli ja ergi või veel mõne analoogilise jõu- ja pikkusühiku kombinatsiooni kasutatakse võimsusühikute kaudu tuletatud tööühikuid, nagu näiteks  $kWh$ .

### 3.2. Energia

Energiaks nimetatakse füüsilist suurust, mis iseloomustab keha või kehade süsteemi võimet teha tööd.

Iga liikuv keha omab kineetilist energiat, mida võib vaadelda kui selle keha liikumise mõõtu. Keha kineetilise energia hulka

saab mõõta töö kaudu, mille peab mingi jõud tegema, et kutsuda esile antud liikumist.

Olgu paigaloleva keha mass  $m$  ning hakaku see keha jõu  $\vec{F}$  mõjul liikuma ja saavutagu ajavahemiku  $t$  lõpuks kiirus  $\vec{v}$ . Dünaamika põhiseaduse (2.1) järgi

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (3.3)$$

Korrutanud võrrandi (3.3) mõlemad pooled skalaarselt ajaelemendile  $dt$  vastava nihkeelemendiga  $d\vec{s}$ , saame

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{s} = \vec{F} d\vec{s} = dA$$

Kuna

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt},$$

siis

$$m\vec{v}d\vec{v} = \vec{F}d\vec{s}$$

Et aga

$$\vec{v}d\vec{v} = v dv \cos \alpha,$$

kus  $\alpha$  on nurk vektorite  $d\vec{v}$  ja  $\vec{v}$  (ning ka  $d\vec{s}$ ) vahel, siis

$$\vec{v}d\vec{v} = v dv_s,$$

kus  $dv_s$  on vektori  $d\vec{v}$  projektsioon liikumise sihi-  
le ning

$$mv dv_s = \vec{F} d\vec{s} \quad (3.4)$$



Integreerinud võrrandi (3.4) mõlemad pooled kogu liikumise ulatuses, saame

$$m \int_0^v v dv = \int_0^t \vec{F} d\vec{s}$$

ja lõpuks

$$\frac{mv^2}{2} = A$$

Seega, kiirusega  $v$  liikuva keha, mille mass on  $m$ , kineetiline energia

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \quad (3.5)$$

Kehade süsteemi puhul võib lisaks kineetilisele energiale esineda veel süsteemi potentsiaalne energia, mille määravad süsteemisisestest jõud ja kehade vastastikune asetus. Täpsemalt, süsteemi potentsiaalse energia muutus (nimelt selle kahanemine) on võrdne süsteemisisestest jõudude tööga.

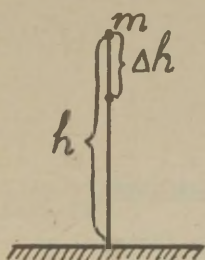
Vaatleme kahte konkreetset juhtu:

1. Keha potentsiaalne energia Maa raskusväljas (süsteemi Maa - antud keha potentsiaalne energia). Kui mingi keha massiga  $m$  asub algul maapinnast kõrgusel  $h$  (joon. 3:4) ning hiljem langeb  $\Delta h$  võrra madalamale, siis süsteemi potentsiaalne energia väheneb

$$\Delta W_p = mg \Delta h$$

võrra ( $mg$  on süsteemisisene (raskus-) jõud).

Kui lugeda näiteks keha maapinnal oleku korral süsteemi potentsiaalne energia nulliks, siis keha kõrguse  $h$  puhul on potentsiaalne energia  $W_p = mgh$ .



Joon. 3:4.

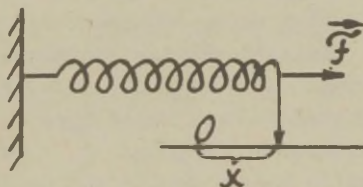
On arusaadav, et niisugune arutluskäik kehtib vaid väikeste kõrguste  $h$  puhul, kus raskuskiirendust  $g$  võib lugeda jäävaks suuruseks. Suurte kõrguste korral  $g = g(h)$  ja

$$-dW_p = mg dh$$

ning

$$W_p = \int_h^0 mg dh \quad (3.6)$$

2. Elastselt deformeeritud keha potentsiaalne energia. Vaatleme elastset vedru (joon. 3.5), mis on jõu  $F$  mõjul



Joon. 3:5.

$x_0$  võrra välja venitatud. Süsteemisiseseks jõuks on sel juhul elastsusjõud  $F = kx$ , kus  $k$  on vedru elastsustegur ning  $x$  - deformatsioon (pikenemine). Deformatsiooni muutumisele  $dx$  võrra vastab vedru potentsiaalse energia muutus

$$dW_p = F dx$$

$x_0$  võrra väljavenitatud vedru kogu potentsiaalne energia

$$W_p = \int_0^{x_0} F dx = \int_0^{x_0} kx dx,$$

$$W_p = \frac{1}{2} K X_0^2 \quad (3.7)$$

### 3.3. Energia jäävuse seadus mehaanikas

Üldjuhul omab kehade süsteem (mehaaniline süsteem) nii kineetilist kui ka potentsiaalset energiat. Nii näiteks süsteemil Maa pluss selle pinnast kõrgusel  $h$  olev keha massiga  $m$  on lisaks kummagi keha kineetilisele energiale veel süsteemi potentsiaalne energia  $mgh$ . Süsteemi mehaanilise energia kineetiline ja potentsiaalne komponent võivad vastastikku muunduda teineteiseks.

Vaatleme mehaanilist süsteemi, millesse kuuluvate kehade massid on  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , nende kiirused vastavalt  $\vec{v}_{01}, \vec{v}_{02}, \dots, \vec{v}_{0n}$ . Olgu nendele kehadele mõjuvad välised jõud  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ning seesmised (süsteemisisesed) jõud  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ . Küllalt väikese ajavahemiku  $\Delta t$  vältel nihkub iga keha mingi  $\Delta \vec{S}_i$  võrra, mida võib pidada sirgloiguks, mis moodustab vastava välisjõuga  $\vec{F}_i$  nurga  $\alpha_i$  ning vastava süsteemisisesega jõuga  $\vec{f}_i$  nurga  $\beta_i$ . Iga keha puhul saab selle kallal tehtud töö tema kineetilise energia juurdekasvuks:

$$\left. \begin{aligned} F_1 \Delta s_1 \cos \alpha_1 + f_1 \Delta s_1 \cos \beta_1 &= \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_{01}^2}{2} \\ F_2 \Delta s_2 \cos \alpha_2 + f_2 \Delta s_2 \cos \beta_2 &= \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_2 v_{02}^2}{2} \\ \dots\dots\dots \\ F_n \Delta s_n \cos \alpha_n + f_n \Delta s_n \cos \beta_n &= \frac{m_n v_n^2}{2} - \frac{m_n v_{0n}^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

kus  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$  on kehade kiirused ajavahemiku  $\Delta t$  lõpus.

Summeeritud võrrandid (3.8), saame

$$\sum_{i=1}^n F_i \Delta S_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n f_i \Delta S_i \cos \beta_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{oi}^2}{2}, \quad (3.9)$$

S.O.

väliste jõude töö + seesmiste jõudude töö = süsteemi kineetilise energia lõppväärtus - süsteemi kineetilise energia algväärtus

$$\Delta A_v + \Delta A_s = W'_k - W_{k0} \quad (3.9')$$

Kui süsteem on vaba välistest mõjudest, on  $\Delta A_v = 0$ . Süsteemisest jõudude töö aga võrdub potentsiaalse energia muutusega (selle vähenemisega):

$$\Delta A_s = W_{p0} - W_p$$

Niisugusel juhul võrrand (3.9') võtab kuju

$$W_{p0} - W_p = W'_k - W_{k0}$$

ehk

$$W_p + W'_k = W_{p0} + W_{k0} \quad (3.10)$$

Viimane võrrand väljendab energia jäävuse seadust mehaanikas. Kui mehaanilisele süsteemile ei mõju välised jõud, siis selle süsteemi kineetilise ja potentsiaalse energia summa on jäävus suur.

See on üldise energia jäävuse seaduse üks erijuht.

Mehaanilise energia jäävuse seadus kehtib nn. konservatiivsete süsteemide kohta, s.o. süsteemide kohta, mille



osade kineetiline energia sõltub ainult nende vastastikusest asetusest. Samuti sõltuvad konservatiivse süsteemi osade vastastikusest asetusest ka nende vahel mõjuvad jõud.

Vastandina konservatiivsetele süsteemidele vaadeldakse nn. dissipatiivseid süsteeme, s.o. mehaanilisi süsteeme, mille mehaaniline energia liikumisel pidevalt väheneb (hajub), muundudes mittemehaaniliseks energiaks, peamiselt soojuseks. Dissipatiivsed süsteemid on näiteks tahkete kehade süsteemid, milles mõjuvad hõõrdejõud.

Teatud reaalseid omadusi arvestamata võib mõningaid dissipatiivseid süsteeme ligikaudu käsitada konservatiivsete süsteemidena.

### 3.4. Potentsiaalne energia ja jõud

Kui üks keha kuulub mõnda mehaanilisse süsteemi, siis on tal selle süsteemi teiste kehade suhtes potentsiaalne energia  $W_p$  ning temale mõjuvad süsteemisisesed jõud, mille resultant olgu  $\vec{F}$ . Selgitame välja nende suuruste vahelise seose. Vaatleme jõu  $\vec{F}$  tööd teelõigul  $\Delta S$  mingis suvaliselt valitud suunas (joon. 3:6):

$$\Delta A = \int_S \Delta S$$

Et see töö on tehtud süsteemi potentsiaalse energia arvel, siis

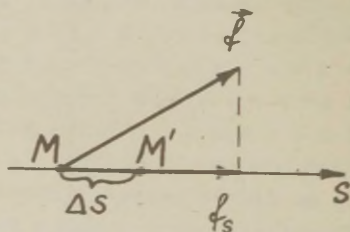
$$\Delta A = -\Delta W_p$$

ehk

$$\int_S \Delta S = -\Delta W_p$$

ning siit

$$F_S = \frac{\Delta W_p}{\Delta S}$$



Joon. 3:6.

Seadud valem väljendab  $f_s$  keskmist väärtust antud teelõigul  $\Delta s$ . Punkti  $M$  jaoks

$$f_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( - \frac{\Delta W_p}{\Delta s} \right) \quad (3.11)$$

Seda piirväärtust võib vaadelda kui osatuletist valitud suunas  $S$  :

$$f_s = - \frac{\partial W_p}{\partial s} \quad (3.11')$$

Et suuna  $S$  valik oli suvaline, siis kehtib (3.11') iga suuna korral, ka suvaliselt valitud ristkoordinaadistiku  $(x, y, z)$  telgede suunas:

$$f_x = - \frac{\partial W_p}{\partial x},$$

$$f_y = - \frac{\partial W_p}{\partial y},$$

$$f_z = - \frac{\partial W_p}{\partial z}$$

Võttes kasutusele telgedesuunalised ühikvektorid  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , saame

$$\vec{f} = - \left( \frac{\partial W_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z} \vec{k} \right)$$

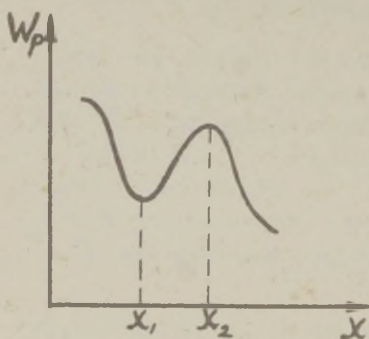
$$\vec{f} = - \text{grad } W_p \quad (3.12)$$

### 3.5. Mehaanilise süsteemi tasakaalutingimused

Kinnises süsteemis, s.o. väliste jõudude puudumisel, on süsteemi mehaaniline energia (potentsiaalse ja kineetilise energia summa) jääv suurus. Siit järgneb, et niisuguse süsteemi kineetiline energia saab kasvada ainult potentsiaalse energia arvel. Kui nüüd kõikide kehade kiirused on nullid

ning potentsiaalse energia väärtus minimaalne, siis süsteemis liikumist tekkida ei saa, süsteem on püsivas tasakaalus. Kinnise süsteemi püsiva tasakaalu tingimuseks on selle süsteemi potentsiaalse energia miinimum.

Vaatleme lihtsat juhtu, kus süsteemi kuuluvate kehade vastastikune asetus on määratud üheainsa suurusega, näit. koordinaadiga  $x$ . Niisuguse süsteemi moodustavad näiteks Maa ja mingi kuulike, mis saab hõõrdumisvabalt liikuda mööda vertikaaltasapinnas olevat kõverat traati. Potentsiaalse energia  $W_p$  graafikul on sel juhul selle traadi kuju (joon. 3:7). Ekstreemumtingimuseks on



Joon. 3:7.

$$\frac{dW_p}{dx} = 0 \quad (3.13)$$

ehk

$$F_x = 0 \quad (3.13')$$

Tingimused (3.13) ja (3.13') on täidetud punktides  $x = x_1$  ja  $x = x_2$ . Mõlemas mainitud asendis on kuulike tasakaalus, kuid need kaks tasakaaluole-

kut on erinevad: punktis  $x_1$  on tasakaal püsiv, punktis  $x_2$  ebapüsiv.

### Ülesanne 3-1.

Kui palju tööd tuleb teha, et suruda  $x_0 = 5 \text{ cm}$  võrra kokku vaguni puhvrivedru, kui on teada, et selle vedru kokkusurumiseks  $x_1 = 1 \text{ cm}$  võrra peab rakendama jõu  $F_1 = 3000 \text{ N}$ ? Kokkusurumine toimub elastsuse piirides.

### Lahendus.

Tehtav töö (3.2):

$$A = \int_0^{x_0} F dx$$

Et  $F = kx$  ning  $k = \frac{F_1}{x_1}$ , siis

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{x_0} kx dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_0} = \frac{F_1}{x_1} \cdot \frac{x_0^2}{2} = \\ &= \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \text{ N} \cdot 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{10^{-2} \text{ m} \cdot 2} = \underline{\underline{3680 \text{ J}}} \end{aligned}$$

### Ülesanne 3-2.

Kera raadiusega  $R$  ujub vedelikus, mille tihedus on  $\rho$  kusjuures kera on sukeldunud poole võrra. Kui palju tööd tuleb teha, et tõsta kera vedelikust välja?

### Lahendus.

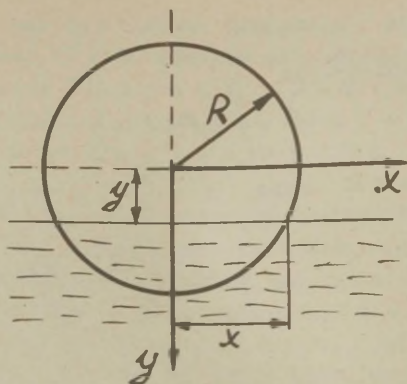
Arvestades Archimedese seadust, võime joonise 3:8 alusel kirjutada

$$A = \int_0^R (mg - V\rho g) dy,$$

kus  $V$  on vedelikus asuva kera osa ruumala:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{R-y}^R x^2 dy = \pi \int_{R-y}^R (R^2 - y^2) dy = \\ &= \left[ \pi \left( R^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \right]_{R-y}^R = \pi R y^2 - \frac{1}{3} \pi y^3 \end{aligned}$$





Joon. 3:8.

Ning nüüd

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^R \left[ mg - (\pi R y^2 - \frac{1}{3} \pi y^3) \rho g \right] dy = \\
 &= \left[ mgy - (\pi R \frac{y^3}{3} - \frac{1}{12} \pi y^4) \rho g \right]_0^R = \\
 &= mgR - \left( \frac{1}{3} \pi R^4 - \frac{1}{12} \pi R^4 \right) \rho g = \\
 &= mgR - \frac{1}{4} \pi R^4 \rho g
 \end{aligned}$$

Kera massi  $m$  määrame lähtetingimusest

$$mg = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g$$

Seega tehtud töö

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2}{3} \pi R^4 \rho g - \frac{1}{4} \pi R^4 \rho g = \\
 &= \underline{\underline{\frac{5}{12} \pi R^4 \rho g}}
 \end{aligned}$$

### Ülesanne 3-3.

Keha massiga  $m = 10 \text{ kg}$  tõstetakse ühtlaselt kiirenevalt kiirendusega  $a = 1,2 \text{ m/s}^2$ . Kui palju tööd teeb selleks rakendatud jõud esimese nelja sekundi jooksul?

#### Lahendus.

Kehale rakendatud jõud

$$F = mg + ma,$$

$t = 4 \text{ s}$  jooksul läbitud tee pikkus

$$h = \frac{at^2}{2}$$

Jõu poolt tehtud töö

$$\begin{aligned} A &= Fh = m(g+a) \frac{at^2}{2} = \\ &= \frac{10 \text{ kg} \cdot 11 \text{ m/s}^2 \cdot 1,2 \text{ m/s}^2 \cdot 16 \text{ s}^2}{2} = \\ &= \underline{\underline{1050 \text{ J}}} \end{aligned}$$

### Ülesanne 3-4.

Keha massiga  $m$  liigub jääva jõu  $F$  mõjul. Kui pikal teelõigul  $S$  kasvab selle keha kiirus  $n$ -kordseks, võrreldes suvaliselt valitud momendil olnud kiirusega  $v_0$ ?

#### Lahendus.

Lähtudes energia jäävuse seadusest võime kirjutada, et jõu  $F$  poolt sooritatud töö arvel suureneb keha kinetiline energia:

$$Fs = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Et  $v = n v_0$  , siis

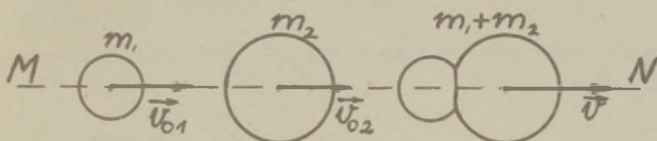
$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2F} (v^2 - v_0^2) = \frac{m}{2F} (n^2 v_0^2 - v_0^2) = \\ &= \frac{m v_0^2}{2F} (n^2 - 1) \end{aligned}$$

#### 4. PÕRGE

Põrke all mõistetakse kehade lühiajalisel kokkupuutumisel toimunud interaktsiooni, mille tulemuseks on nende kehade kiiruse muutumine.

Kui põrkest osavõtvad kehad on elastsed, on põrkeprotsessis tegemist kehade elastsete deformatsioonidega ning põrget nimetatakse samuti elastseks. Mitteelastsete (plastiliste) kehade korral on tegemist mitteelastse põrkega.

##### 4.1. Kahe mitteelastse keha põrge



Joon. 4:1.

Liikugu kaks mitteelastset ümmargust kuuli, mille massid on  $m_1$  ja  $m_2$  ning kiirused vastavalt  $\vec{v}_{01}$  ja  $\vec{v}_{02}$ , nii et nende tsentrid asuvad samal sirgel  $MN$  (joon.4:1). Pärast antud tingimustes toimunud mitteelastset põrget liiguvad kuulid koos ühise kiirusega  $\vec{v}$  mööda sama sirget  $MN$ . Lõppkiiruse  $\vec{v}$  määramiseks vaatleme kuule kui



isoleeritud süsteemi (selleks peavad välised mõjud kuulidele olema tähtsusetult väikesed) ning kirjutame liikumishulga jäävuse seaduse kujul

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = (m_1 + m_2) \vec{v} \quad (4.1)$$

ning sellest

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02}}{m_1 + m_2}$$

Vektoriline võrrand (4.1) kujuneb algebraliseks, kui valida sirgel  $MN$  positiivne suund. Käesoleval juhul on loomulik valida positiivseks suunaks suund vasakult paremale, siis on võrrandis (4.1) esinevad lähtesuurused positiivsed:

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = (m_1 + m_2) v$$

ning tulemus

$$v = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2}$$

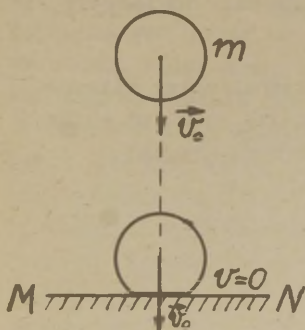
samuti positiivne. See tähendab, et  $\vec{v}$  on suunatud ka vasakult paremale.

#### 4.2. Mitteelastse keha põrke risti vastu liikumatut mitteelastset sein

Olgu kuuli mass  $m$  ning tema kiirus põrke algmomendil  $\vec{v}_0$  risti seinaga  $MN$  (joon. 4:2). Tingimusel, et nii kuul kui ka sein on mitteelastsed, on põrke lõpus kuuli kiirus  $v=0$ . Arvutame impulsi  $\vec{i}$ , mis saab sein  $MN$  löögi tulemusena.

Newtoni II seaduse alusel saab kuul põrkel impulsi

$$\vec{i}' = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = -m\vec{v}_0$$



Joon. 4:2.

Newtoni III seaduse järgi on seinalle antud impulss sellega võrdvastupidine; seega

$$\vec{i} = m\vec{v}_0 \quad (4.2)$$

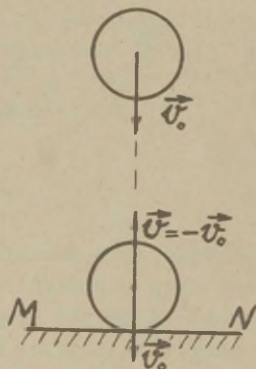
#### 4.3. Elastse kuuli põrge vastu elastset seina

Elastse põrke korral on kuuli kiirus  $v$  põrke lõppmomendil võrdne kiirusega  $v_0$  põrke algmomendil. Kui kuul langeb seinale risti (mööda normaali) (joon. 4:3), on need kiirused võrdvastupidised:

$$\vec{v} = -\vec{v}_0$$

Sein saab sel juhul impulsi

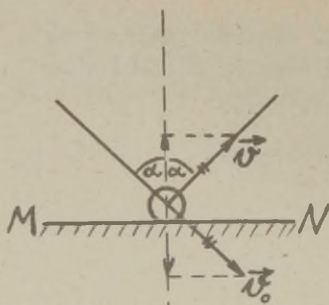
$$\vec{i} = -(m\vec{v} - m\vec{v}_0) = 2m\vec{v}_0 \quad (4.3)$$



Joon. 4:3.

Seega on elastne löök (kuuli sama massi ja sama algkiiruse korral) kaks korda "tugevam" kui mitteelastne.

Kui täiesti sileda pinnaga elastne kuul langeb samuti täiesti siledale elastsele seinale mingi nurga  $\alpha$  all selle normaali suhtes (joon. 4:4), tulevad impulsi arvutamisel arvesse kiiruste  $\vec{v}_0$  ja  $\vec{v}$  (liikumishulkade  $m\vec{v}_0$  ja  $m\vec{v}$ ) projektsioonid seina normaalele:



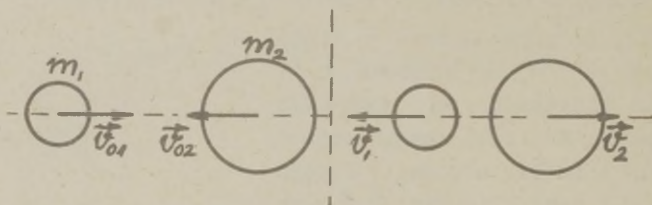
$$mv_0 \cos \alpha \quad \text{ja} \quad mv \cos \alpha$$

(Seinaga paralleelne kiiruse komponent sel juhul ei muutu.)  
Sein saab nüüd impulsi

$$i = 2mv_0 \cos \alpha \quad (4.4)$$

Joon. 4:4.

#### 4.4. Kahe elastse kuuli tsentraalne põrge



Joon. 4:5.

Liikugu kaks ümmargust kuuli, mille massid on  $m_1$  ja  $m_2$  ning kiirused vastavalt  $\vec{v}_{01}$  ja  $\vec{v}_{02}$  nii, et nende tsentrid asuvad sirgel  $MN$  (joon. 4:5,a). Pärast elastset põrget on kuulide kiirused  $\vec{v}_1$  ja  $\vec{v}_2$  suunatud mööda sama sirget (joon. 4:5,b).

Kuulide lõppkiiruste  $\vec{v}_1$  ja  $\vec{v}_2$  määramiseks vaatleme kuule isoleeritud süsteemina ning kirjutame liikumishulga jäävuse seaduse:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (4.5)$$

Vektoriline võrrand (4.5) kujuneb algebraliseks, kui valida sirgel  $MN$  positiivne suund, näiteks vasakult pare-

male. Niisugusel juhul on lähtekiirus  $v_{01}$  positiivne,  $v_{02}$  aga negatiivne. Lõppkiirused  $\vec{v}_1$  ja  $\vec{v}_2$  on joonisele 4:5, b kantud juhulikuult. Nende väärtus ja suund selguvad arvutuste tulemusena, kusjuures samuti kui lähteandmete puhul määrab vastuse märk kiiruse suuna.

Võrrand (4.5) on kahe tundmatuga, järelikult pole lahendatav üksinda. Teise võrrandi kirjutame, lähtudes kuulide kineetilise energia jäävusest. Tõepoolest, kui kuulid on absoluutselt elastsed, siis põrke esimeses faasis kulub osa kuulide kineetilisest energiast nende deformeermiseks (muundub deformatsiooni potentsiaalseks energiaks). Põrke teises faasis aga toimub energia vastupidine muundumine - deformatsiooni energia muundub uuesti kuulide kineetiliseks energiaks. Niisiis:

$$\frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_{02}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad (4.6)$$

Lahendanud koos võrrandi (4.5) alusel kirjutatud algebralise võrrandi ja võrrandi (4.6), saab määrata  $\vec{v}_1$  ja  $\vec{v}_2$  algebralised väärtused:

$$v_1 = \frac{m_1 v_{01} + 2m_2 v_{02} - m_2 v_{01}}{m_1 + m_2} \quad (4.7)$$

$$v_2 = \frac{m_2 v_{02} + 2m_1 v_{01} - m_1 v_{02}}{m_1 + m_2}$$

Valemitest (4.7) järgneb, et

$$v_2 - v_1 = v_{01} - v_{02},$$

s.o. et kuulide kiiruste vahe pärast põrget säilitab oma absoluutväärtuse, kuid muudab märgi vastupidiseks.

Erijuhul, kui kuulide massid on võrdsed ( $m_1 = m_2$ ), siis

$$v_1 = v_{02} \quad \text{ning} \quad v_2 = v_{01}$$

Seega toimub kahe ühesuguse elastse kuuli tsentraalsel põrkel nende kiiruste (ka liikumishulkade) vahetus.



Analoogiline arutluskäik on rakendatav ka suvalise kujuga elastsete kehade põrke puhul, kui kehade algkiirused on suunatud mööda nende masskeskmeid ühendavat sirget ning jõud põrkel mõjuvad mööda sama sirget.

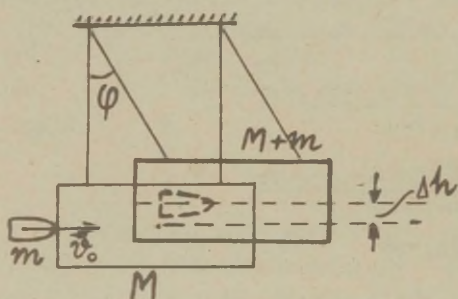
#### Ülesanne 4-1.

Püssikuul massiga  $m = 20\text{ g}$ , lennates horisontaalselt kiirusega  $v_0 = 400\text{ ms}^{-1}$ , tabab  $l = 4\text{ m}$  pikkuste vertikaalsete paelte otsas rippuvat keha massiga  $M = 5\text{ kg}$  ning tungib sellesse. Määrata nurk  $\varphi$ , mille võrra kalduvad keha kandvad paelad vertikaalasendist kõrvale. Paelte mass jätta arvestamata ning nende otsas rippuvat keha pidada ainepunktiks.

#### Lahendus.

Ülesandes vaadeldava protsessi jagame kahte etappi. Esi-

mene etapp on püssikuuli tungimine rippuvasse kehasse - mitteelastne põrge, mille tulemusena keha temas sisalduva kuuliga saab horisontaalse kiiruse  $v$ :



$$v = \frac{mv_0}{m+M}$$

Joon. 4:6.

Teises etapis toimub süsteemi kõrvalekal-

dumine vertikaalasendist seni, kuni selle kineetiline energia muundub täielikult potentsiaalseks, s.o.

$$\frac{(m+M)v^2}{2} = (m+M)gh$$

ehk

$$v = \sqrt{2gh}$$

Joonisest (4:6) nähtub, et

$$h = l(1 - \cos \varphi)$$

Seega

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi)} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\varphi}{2}$$

ning

$$\frac{mv_0}{m+M} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\varphi}{2},$$

kust

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi}{2} &= \frac{mv_0}{(m+M)2\sqrt{gl}} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 400 \text{ m s}^{-1}}{5,02 \text{ kg} \cdot 2\sqrt{9,81 \text{ m s}^{-2} 4 \text{ m}}} = 0,127 \end{aligned}$$

ning

$$\underline{\underline{\varphi = 14^{\circ}40'}}$$

Märkus. Ülesandes kirjeldatud seade on ballistiline pendel, mida praktikas saab kasutada püssikuuli kiiruse määramiseks.

#### Ülesanne 4-2.

Tuumatehnikas on sageli vaja aeglustada neutroneid. Seda tehakse grafiidi või raske vee abil. Arvutada, mitu korda väheneb neutroni energia, kui neutron põrkab absoluutselt elastselt ning tsentraalselt 1) süsiniku, 2) raske vesiniku tuumaga.

#### Lahendus.

Tähistame neutroni massi  $m$ , tema alg- ja lõppkiiruse

vastavalt  $v_0$  ja  $v$  ; süsiniku ja raske vesiniku tuumade massid olgu  $nm$ , kusjuures  $n_1=12$  süsiniku ning  $n_2=2$  raske vesiniku puhul.

Loeme tuuma kiiruse enne põrget nulliks, pärast põrget aga olgu see  $v'$ , siis võime kirjutada liikumishulga jäävuse ja kineetilise energia jäävuse seaduste alusel kaks võrrandit:

$$\left. \begin{aligned} m v_0 &= m v + n m v' \\ m v_0^2 &= m v^2 + n m v'^2 \end{aligned} \right\}$$

ehk

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= v + n v' \\ v_0^2 &= v^2 + n v'^2 \end{aligned} \right\}$$

Lahendanud selle võrrandisüsteemi, saame

$$v = v_0 \frac{1-n}{1+n}$$

Neutroni alg- ja lõppenergia suhe on

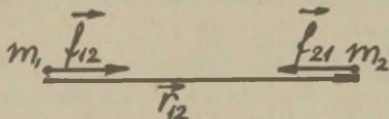
$$\frac{v_0^2}{v^2} = \left( \frac{n+1}{n-1} \right)^2$$

Süsiniku korral on see 1,40 ning vesiniku korral 9.

## 5. GRAVITATSIOON

### 5.1. Gravitatsiooniseadus

Kõikide kehade vahel mõjuvad vastastikuse tõmbe (gravitatsiooni) jõud. Gravitatsiooniseaduse formuleeris Newton järgmiselt: Kaks ainepunkti tõmbuvad jõuga, mis on suunatud mõõda neid punkte ühendavat sirget ja mille suurus on võrdeline ainepunktide masside korrutisega ning pöördvõrdeline nende vahelise kauguse ruuduga:



Joon. 5:1.

$$\vec{f}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (5.1)$$

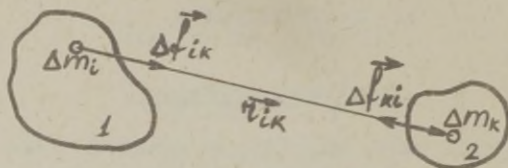
Valemis (5.1)  $m_1$  ja  $m_2$  on ainepunktide massid,  $\vec{r}_{12}$  ühest ainepunktist teise suunatud raadiusvektor,  $\gamma$  gravitatsioonikonstant ning  $\vec{f}_{12}$  esimesele ainepunktile teise poolt avaldatud jõud.



Newtoni III seaduse järgi on teisele ainepunktile mõjuv jõud

$$\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$$

Ainepunktide kohta sõnastatult on gravitatsiooniseadus rakendatav reaalsete kehade puhul, kuna neid saab vaadelda kui ainepunktidest koosnevaid süsteeme.



Joon. 5:2.

Kehade 1 ja 2 (joon. 5:2) massielementide  $\Delta m_i$  ja  $\Delta m_k$  jaoks annab gravitatsiooniseadus

$$\Delta \vec{f}_{ik} = \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \frac{\vec{r}_{ik}}{r_{ik}}$$

Kehade vahel mõjuv summaarne jõud

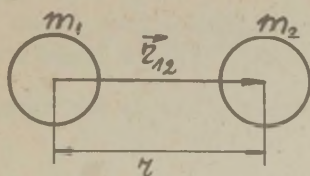
$$\vec{f}_{12} = \sum_i \sum_k \vec{f}_{ik}$$

Newtoni kolmanda seaduse järgi  $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$

Kui keha 1 on jaotatud  $N_1$  osakeseks  $\Delta m$  ning keha 2 koosneb  $N_2$  osakesest, siis peab summa sisaldama  $N_1 N_2$  liiget.

Kahe homogeense kera puhul (joon. 5:3) tehtud arvutused annavad gravitatsioonijõu valemiks

$$\vec{f}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (5.2)$$



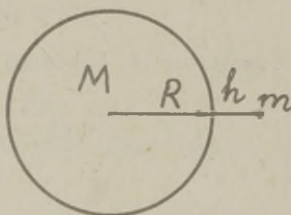
Joon. 5:3.

Kui üks keradest ( $M, R$ ) on väga suur, teist aga võib selle suhtes pidada ainepunktiks ( $m$ ), mis asub selle pinna läheduses (joon. 5:4), s.o.  $h \ll R$ , siis võib gravitatsioonijõudu arvutada valemi

$$f = \gamma \frac{Mm}{R^2} \quad (5.3)$$

järgi.

Gravitatsioonikonstandi  $\gamma$  väärtuse on määranud esmakordselt Cavendish 1798. aastal. Cavendish<sup>3</sup> mõttis torsioonkaalude abil kahe kerakujulise keha vahel mõjuvat jõudu, kusjuures üks keradest oli nii mõõdetmetelt kui ka massilt palju suurem teisest.



Tänapäeval peetakse õigeks gravitatsioonikonstandi väärtust

Joon. 5:4.

$$\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

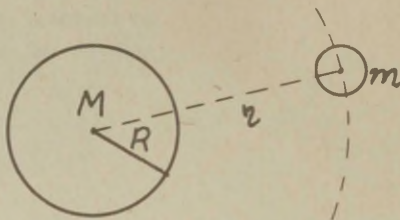
Ainepunktide jaoks formuleeritud gravitatsiooniseadus kehtib kõikide kehade puhul, mille mõõtmed on kadüvväikesed nendevaheliste kauguste suhtes, näiteks taevakehade puhul. Newton kontrollis oma seadust kõigepealt, vaadeldes Kuu liikumist ümber Maa (joon. 5:5). Ta määras Kuu tsentripetaalkiirenduse, lähtudes Kuu ja Maa vahelisest kaugusest

<sup>3</sup> Henri Cavendish (1731-1810), inglise keemik ja füüsik.

$r = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$  ja Kuu tiirlemisperioodist  $T = 27,3$  päeva:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 2,73 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$$

ning siis arvutas sama suuruse, lähtudes Kuu ja Maa vahelisest gravitatsioonijõust.



Joon. 5:5.

Dünaamika põhiseaduse järgi

$$m a_n = \gamma \frac{m M}{r^2}$$

ehk

$$a_n = \gamma \frac{M}{r^2}, \quad (5.4)$$

kus  $m$  on Kuu ning  $M$  Maa mass. Teiselt poolt raskuskiirendus maapinnal

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} \quad (5.5)$$

kus  $R$  on Maa raadius ( $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ).

Seostest (5.4) ja (5.5) järgneb:

$$a_n = g \frac{R^2}{r^2} = 2,73 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$$

Kahel viisil saadud tulemuste kokkulangemine kinnitas Newtoni gravitatsiooniseaduse õigsust.

Cavendish, määranud gravitatsioonikonstandi väärtuse, kasutas seda Maa massi ja selle keskmise tiheduse määramiseks.

Mingi keha (massiga  $m$ ) raskusjõu maapinnal võib avaldada kahel viisil:

$$P = mg \quad \text{ja} \quad P = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

ning siit

$$M = \frac{gR^2}{\gamma} = \underline{\underline{5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}}}$$

Maa keskmine tihedus

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \underline{\underline{5,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}}$$

## 5.2. Kepleri seadused

Newton püstitas gravitatsiooniseaduse, lähtudes Kepleri seadustest planeetide liikumise kohta.

I. Kõik planeedid liiguvad mööda ellipseid, mille ühes fookuses asub Päike.

II. Planeedi raadiusvektor katab võrdsetes ajavahemikes võrdsed pinnad.

III. Planeetide tiirlemisperioodide ruudud suhtuvad nagu nende elliptiliste orbiitide suurte pooltelgede kuubid.

Lähtudes nendest seadustest tuletas Newton gravitatsiooniseaduse.

Oletanud lihtsuse mõttes, et planeedi orbiit on ringjoon raadiusega  $r$  (tegelikult planeetide orbiidid tõepoolest erinevad väga vähe ringjoonest), saab kirjutada planeedi liikumise kiirenduse

$$a = \frac{v^2}{r},$$

kus  $v$  on planeedi liikumise kiirus. Kui asendada kiirus



$v$  planeedi tiirlemisperioodi  $T$  kaudu, avaldub kiirendus

$$a = \frac{4\pi^2 v}{T^2}$$

Siit järgneb, et kahe planeedi puhul  $(m_1, r_1, T_1)$  ja  $(m_2, r_2, T_2)$  nendele Päikese poolt mõjuvate jõudude  $f_1$  ja  $f_2$  suhe

$$f_1 : f_2 = \frac{m_1 r_1 T_2^2}{m_2 r_2 T_1^2}$$

Vastavalt Kepleri kolmandale seadusele

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

ning järelikult

$$f_1 : f_2 = \frac{m_1}{r_1^2} : \frac{m_2}{r_2^2}$$

Niisiis, Päikese ja planeedi vahel mõjuv jõud  $f$  on võrdeline planeedi massiga ning pöördvõrdeline nende vahelise kauguse ruuduga:

$$f = k \frac{m}{r^2} \quad (5.6)$$

Oletanud, et võrdetegur  $k$  omakorda on võrdeline Päikese massiga  $M$ , sai Newton kirjutada gravitatsiooniseaduse selle lõplikul kujul

$$f = \gamma \frac{Mm}{r^2} \quad (5.7)$$

---

≡ Johannes Kepler (1571-1630), saksa astronoom.

### 5.3. Gravitatsiooniväli

Gravitatsiooniseaduse järgi mõjub iga ainepunkti ( $M$ ) ümbritseva ruumi mistahes punktis ( $\vec{r}$ ) asetsevale kehale ( $m$ ) jõud

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

(joon. 5:6). Seega ümbritseb iga ainepunkti jõuväli, mida antud juhul nimetatakse gravitatsiooniväljaks.



Gravitatsioonivälja isoleerimiseks kasutatakse kahte suurust: 1) väljatugevust ja 2) potentsiaali.

1) Gravitatsioonivälja tugevus  $\vec{E}$  välja antud punktis mõõdub jõuga, millega väli mõjutab sellesse punkti paigutatud ühikulise

massiga keha (joon. 5:6):

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.8)$$

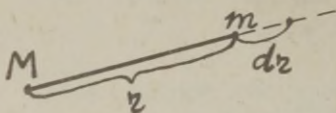
Seega on väljatugevuse vektor  $\vec{E}$  suunatud välja tekitava ainepunkti poole (väljapunkti raadiusvektori  $\vec{r}$  vastu).

On selge, et väljatugevuse dimensioon ühtib kiirenduse dimensiooniga, järelikult väljendab gravitatsioonivälja tugevus kiirendust, millega hakkaks liikuma välja antud punktis asuv vaba keha.

2) Gravitatsioonivälja potentsiaal välja antud punktis mõõdub tööga, mida peavad tegema kõrvalised (mitte gravitatsioonilise päritoluga) jõud, et viia ühikulise massiga keha sellest punktist lõpmatusse, s.o. nii kaugele välja tekitavast ainepunktist, kus gravitatsioonijõud praktiliselt enam ei mõju.

Arvutame töö, mis tuleb teha keha massiga  $m$  viimiseks

punktist koordinaadiga  $z$  lõpmata kaugele  $z \rightarrow \infty$  (joon. 5:7). Elementaarsel teelõigul  $dz$  tehtav töö



Joon. 5:7.

$$dA = f dz = -\gamma \frac{Mm}{z^2} dz$$

Otsitava töö saame, integreerides rajades  $z \rightarrow \infty$  :

$$A = -\gamma Mm \int_z^{\infty} \frac{dz}{z^2} = -\gamma \frac{Mm}{z}$$

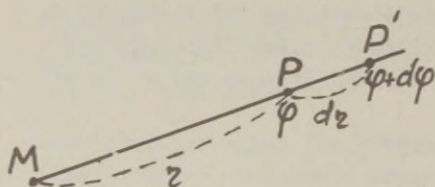
Definitsioonikohaselt välja potentsiaal punktis ( $z$ )

$$\varphi = \frac{A}{m}$$

ehk

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{z} \quad (5.9)$$

Selgitame veel, milline matemaatiline seos on väljatugevuse ja potentsiaali vahel. Olgu väljatekitajaks ainepunkt massiga  $M$  (joon. 5:8). Välja punktis  $P$  olgu potentsiaal  $\varphi$  ning punktis  $P'$   $\varphi + d\varphi$ . Väljatugevuse võime mõlemas punktis lugeda praktiliselt samaks:



$$E = \gamma \frac{M}{z^2}$$

Keha viimisel punktist  $P$  punkti  $P'$  tehtud töö võime avaldada kahel viisil:

Joon. 5:8.

$$dA = -Emdz$$

ning

$$dA = -m[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = md\varphi$$

Siit järgneb, et

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \quad (5.10)$$

Ainepunktide süsteemi  $M_1, M_2, \dots, M_n$  korral saame määrata selle süsteemi gravitatsioonivälja tugevuse kui üksikutest ainepunktidest tingitud väljatugevuse  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$  geomeetrilise summa

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = -\gamma \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} \quad (5.11)$$

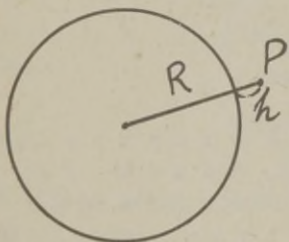
Samuti saab määrata selle välja mingi punkti potentsiaali, kui üksikutest ainepunktidest tingitud potentsiaalide  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  aritmeetilise summa

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = -\gamma \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i}, \quad (5.12)$$

kus  $\vec{r}_i$  on antud punkti määrav raadiusvektor  $M_i$  suhtes.

Iga konkreetset keha saab vaadelda kui lõpmatu hulga ainepunktide süsteemi ning selle välja arvutada kui nende ainepunktide väljade summa, seejuures valemite (5.11) ja (5.12) summa märgid asenduvad vastavate integraalidega.

Maad ümbritseva gravitatsioonivälja tugevus ja potentsiaal tema pinna otseses läheduses (punktis  $P$  joonisel 5.9, kui  $h \ll R$ ) avalduvad järgmiste valemitega:



Joon. 5.9.

$$E = \gamma \frac{M}{R^2} = g \quad (5.13)$$

ning

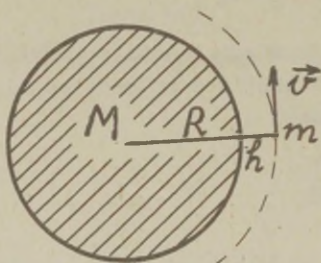
$$\varphi = -\gamma \frac{M}{R}, \quad (5.14)$$

kus  $M$  on Maa mass,  $R$  maakera raadius ning  $g$  raskuskiirendus Maa pinnal.



#### 5.4. Esimene ja teine kosmiline kiirus

Esimeseks kosmiliseks kiiruseks nimetatakse kiirust, mille peab andma kehale, et ta saaks Maa tehiskaaslaseks, s.o. jääks liikuma Maad ümbritsevale orbiidile. Lihtsuse mõttes loeme seda orbiiti ringjooneliseks (joon. 5:10). Niisuguse ringliikumise



Joon. 5:10.

Kui  $h \ll R$ , on  $v = \sqrt{\frac{\mu M}{R}}$ . Kuna  $\mu \frac{Mm}{R^2} = mg$ , siis  $\mu M = gR^2$  ning

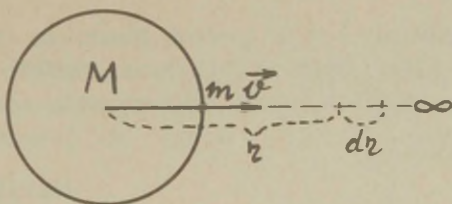
$$v = \sqrt{gR} \quad (5.15)$$

Teades, et  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  ning  $R = 6370 \text{ km}$ , saame

$$\underline{\underline{v = 7,9 \text{ km s}^{-1}}}$$

Teiseks kosmiliseks kiiruseks nimetatakse kiirust, mille peab andma kehale, et ta lahkuks jäädavalt Maa raskusväljast. Kehale ( $m$ ) peab maapinnal andma sellise kiiruse  $v$ , et tema kineetiline energia  $W_k = \frac{mv^2}{2}$  oleks küllaldane selleks, et

teha töö  $A$  Maa külgetõmbejõu ületamiseks teel maapinnalt (kaugus  $R$  Maa tsentrist) lõpmatusse. Teelõigul  $dz$  tehtav töö (joon. 5:11)  $dA = f_z dz$ .



Joon. 5:11.

Gravitatsioonijõud

$$f_z = \gamma \frac{Mm}{z^2},$$

seega

$$dA = \gamma \frac{Mm}{z^2} dz$$

ning

$$A = \int_R^{\infty} dA = \gamma Mm \int_R^{\infty} \frac{dz}{z^2} = \gamma \frac{Mm}{R}$$

Tingimusest  $W_k = A$  :

$$\frac{mv^2}{2} = \gamma \frac{Mm}{R}$$

saame

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$$

ehk võttes jälle arvesse, et  $\gamma M = gR^2$ ,

$$v = \sqrt{2gR} \quad (5.16)$$

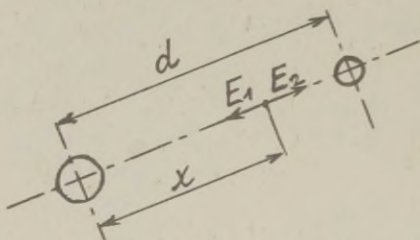
Arvutused annavad

$$\underline{v = 11,2 \text{ km s}^{-1}}$$

Ülesanne 5-1.

Millises punktis on Maad ja Kuud ühendaval sirgel nende ühise gravitatsioonivälja tugevus null? Võib arvestada, et Maa mass on 81 korda suurem Kuu massist.

Lahendus (joon. 5:12).



Joon. 5:12.

Tähistame Maa ja Kuu vahelise kauguse  $d$ -ga, siis kaugusel  $x$  Maast on kummagi taevakeha gravitatsioonivälja tugevused (5.8):

Maa puhul

$$E_1 = \gamma \frac{M}{x^2}$$

ning Kuu puhul

$$E_2 = \gamma \frac{M}{81(d-x)^2}$$

kus  $\gamma$  on gravitatsioonikonstant ning  $M$  tähistab Maa massi.

Ülesande kohaselt

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0,$$

s.o.

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$$

Siit

$$\gamma \frac{M}{x^2} = \gamma \frac{M}{81(d-x)^2}$$

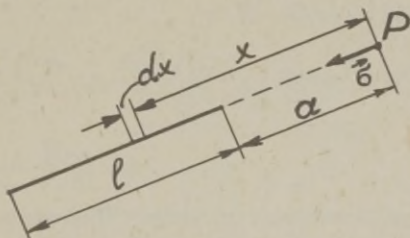
Lahendanud viimase võrrandi, saame vastuseks

$$\underline{\underline{x = 0,9 d}}$$

### Ülesanne 5-2.

Peene varda mass on  $m$  ning pikkus  $\ell$ . Arvutada varda gravitatsioonivälja potentsiaal ja selle tugevus punktis  $P$  kaugusel  $a$  varda lähemast otspunktist varda sihis.

Lahendus (joon. 5:13).



Joon. 5:13.

Varda element pikkusega  $dx$  (massiga  $dm = \frac{m}{\ell} dx$ ) tekitab punktis  $P$  potentsiaali (5.9)

$$d\varphi = -\gamma \frac{dm}{x+a} = -\gamma \frac{m dx}{\ell x}$$

Kogu vardast tekitatud potentsiaal

$$\varphi = -\gamma \frac{m}{\ell} \int_a^{a+\ell} \frac{dx}{x} = -\gamma \frac{m}{\ell} \ln \frac{a+\ell}{a}$$

Väljatugevus punktis  $P$  on suunatud varda sihis viimase poole. Tähistanud vastavasuunalise ühikvektori  $\vec{e}$  -ga ning teades, et  $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ , võime kirjutada gravitatsioonivälja tugevuse punktis  $P$  (5.10):

$$\vec{E} = \frac{d\varphi}{da} \vec{e},$$



$$\vec{E} = -\gamma \frac{m}{\ell} \frac{a}{\ell+a} \frac{a-\ell-a}{a^2} \vec{\sigma} = \gamma \frac{m}{a(\ell+a)} \vec{\sigma}$$

Märkus. Väljatugevuse väärtuse  $E$  oleksime võinud arvutada ka otseselt. Varda element  $dm$  tekitab punktis  $P$  väljatugevuse

$$dE = \gamma \frac{dm}{x^2} = \gamma \frac{m}{\ell} \frac{dx}{x^2}$$

Kogu vardast tingitud gravitatsioonivälja tugevus

$$E = \gamma \frac{m}{\ell} \int_a^{a+\ell} \frac{dx}{x^2} = \gamma \frac{m}{\ell} \left( -\frac{1}{x} \right)_a^{a+\ell} = \gamma \frac{m}{a(a+\ell)}$$

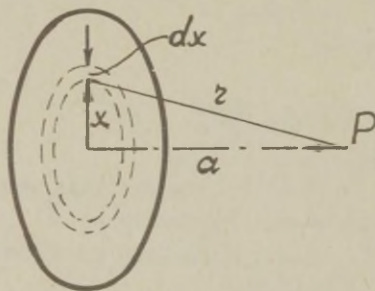
Kasutades ühikvektorit  $\vec{\sigma}$ ,

$$\vec{E} = \gamma \frac{m}{a(a+\ell)} \vec{\sigma}$$

### Ülesanne 5-3.

Määrata homogeense ketta (massiga  $m$  ning raadiusega  $R$ ) gravitatsioonivälja potentsiaal ja selle tugevus punktis  $P$ , mis asub ketta teljel kaugusel  $a$  ketta tasapinnast.

Lahendus (joon. 5:14).



Joon. 5:14.

Ketta rõngaselement massiga

$$dm = \frac{m \cdot 2\pi x dx}{\pi R^2} = \frac{2m}{R^2} x dx$$

tingib punktis  $P$  potentsiaali (5.9)

$$d\varphi = -\gamma \frac{dm}{z} = -\gamma \frac{2m x dx}{R^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

Potentsiaali koguväärtuse saame, integreerides  $d\varphi$  avaldise kogu ketta ulatuses

$$\begin{aligned}\varphi &= -\gamma \frac{2m}{R^2} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -\gamma \frac{2m}{R^2} \left[ \sqrt{a^2 + x^2} \right]_0^R = \\ &= -\gamma \frac{2m}{R^2} \left[ \sqrt{a^2 + R^2} - a \right]\end{aligned}$$

Väljatugevus punktis  $P$  on suunatud mööda telge ketta poole (ühikvektor  $\vec{e}$ ) ning selle väärtus ( $5 \cdot 10^{-1}$ )

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

Seega

$$\begin{aligned}E &= \frac{d\varphi}{da} \vec{e} = -\gamma \frac{2m}{R^2} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} - 1 \right] \vec{e} = \\ &= \gamma \frac{2m}{R^2} \left[ 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right] \vec{e}\end{aligned}$$

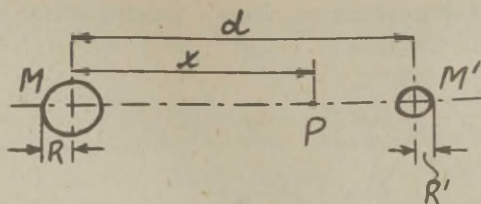
#### Ülesanne 5-4.

Kui suure minimaalse kiirusega peab laskma raketi maapinnalt Kuu suunas, et ta jõuaks Kuu pinnale? Maa ja Kuu tsentritevaheline kaugus on keskmiselt  $d = 380000 \text{ km}$ . Maa raadius  $R = 6370 \text{ km}$ , Kuu raadius  $R'$  on Maa raadiusest  $R$  neli korda ning Kuu mass  $M'$  Maa massist  $M$  81 korda väiksem. Kui suur on sel juhul raketi lõppkiirus selle langemisel Kuu pinnale?

Ohutakistus raketi liikumisel jääb arvestamata.

#### Lahendus (joon. 5:15).

Lahendame ülesande, lähtudes mehaanilise energia jäävusest. Ülesandest 5-1 on teada, et kaugusel  $x = 99d$  Maa tsentrist asub punkt  $P$ , kus kahe taevakeha gravitatsioo-



Joon. 5:15.

niväljad kompenseeruvad. (Maa ja Kuu poolt raketile avaldatavad tõmbejõud on võrdsed.) Tähistanud gravitatsiooni-konstandi  $\gamma$ -ga, raketi massi  $m$ -ga ning selle viskekiiruse maapinnalt  $v$ -ga, võime kirjutada:

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} - \gamma \frac{mM'}{d-R} = -\gamma \frac{mM}{x} - \gamma \frac{mM'}{d-x}$$

Selle võrrandi vasak pool väljendab raketi kineetilise ja potentsiaalse energia summat maapinnal. Paremal pool võrdsusmärki on kirjas raketi potentsiaalne energia punktis P. Lahendanud võrrandi, saame

$$\begin{aligned} v^2 &= 2 \left[ \gamma M \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{0,9d} + \frac{1}{81(d-R)} - \frac{1}{81 \cdot 0,1d} \right) \right] = \\ &= 2gR \left( 1 - \frac{R}{0,9d} - \frac{R}{81(d-R)} - \frac{R}{81 \cdot 0,1d} \right), \end{aligned}$$

kus  $g$  on raskuskiirendus maapinnal.  
Siit

$$v = \sqrt{2gR \cdot 0,98} = \underline{\underline{11,1 \text{ km s}^{-1}}}$$

Et määrata raketi langemise kiirus Kuu pinnale  $v'$ , kirjutame veel kord mehaanilise energia jäävuse võrrandi

$$-\gamma \frac{mM}{x} - \gamma \frac{mM'}{d-x} = \frac{mv'^2}{2} - \gamma \frac{mM'}{R'} - \gamma \frac{mM}{d-R'},$$

kus paremal pool võrdsusmärki olev avaldis väljendab raketi

kineetilise ja potentsiaalse energia summat Kuu pinnal.

Lahendanud võrrandi, saame

$$v'^2 = 2 \left[ \gamma \frac{M'}{R'} \left( 1 - \frac{81R'}{0,9d} - \frac{R'}{0,1d} + \frac{81R'}{d-R'} \right) \right]$$

ehk

$$\begin{aligned} v'^2 &= 2 \left[ \frac{1}{4 \cdot 81} \gamma \frac{M}{R} \left( 1 - \frac{81R}{4 \cdot 0,9d} - \frac{R}{4 \cdot 0,1d} + \frac{81R}{4(d - \frac{1}{4}R)} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4 \cdot 81} 2gR \left[ 1 - \frac{81R}{4 \cdot 0,9d} - \frac{R}{4 \cdot 0,1d} + \frac{81R}{4(d - \frac{1}{4}R)} \right] \end{aligned}$$

ning lõplikult

$$v' = \frac{1}{18} \sqrt{2gR \cdot 0,991} = \underline{\underline{0,59 \text{ km s}^{-1}}}$$

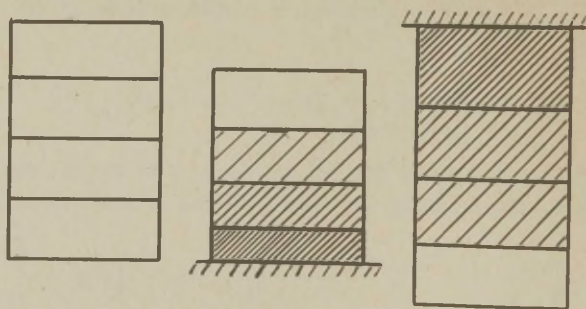


## 6. ELASTUSJÕUD

### 6.1. Deformatsioonid ja pinged tahketes keha

Deformatsiooniks nimetatakse keha ruumala või tema kuju igasugust muutust. Deformeerumise protsessis nihkuvad keha osad üksteise suhtes. Vastava nihkumise ulatus ongi deformatsiooni määraks.

Kõik tahked kehad deformeeruvad igasuguste jõudude mõjul. Kui mõnikord need deformatsioonid pole märgatavad, siis ainult sellepärast, et nad on väikesed. Kokkupuutuvad kehad mõjutavad teineteist (tõmbavad, tõukavad) nimelt seetõttu, et nad on deformeerunud. Nii vajutab lauale asetatud ese lauda ning laud toetab seda eset nende mõlema deformatsiooni tõttu. Seejuures on kõige enam deformeerunud kokkupuutepinna lähedased kihid (joon. 6:1).



Joon. 6:1.

Deformatsiooni nimetatakse elastseks, kui see pärast deformeeriva mõju lakkamist jäljetult kaob, ning mitteelastseks ehk plastiliseks, kui see täielikult säilib pärast deformeerivate jõudude kõrvaldamist.

Reaalseid tahkeid kehi võib vaadelda kui elastseid vaid teatud tingimustes. Samuti ei ole tegelikkuses ka täielikult plastilisi kehi.

Vastastikune mõju esineb mitte ainult kahe erineva deformeeritud keha vahel, vaid ka ühe ja sama deformeeritud keha kahe naaberosa vahel. Seega esinevad deformeeritud kehas seesmised jõud. Öeldakse, et deformeeritud kehas esinevad pinged, kusjuures pinge all mõistetakse keha mingi mõttelise lõike pinnaühiku kohta tuleva seesmise jõu väärtust.

## 6.2. Elastne venituse ja kokkusurumine

Vaatleme venitava (kokkusuruva) jõu  $F$  mõju vardale, mille algpikkus on  $l$  ning tema ümmarguse (lihtsuse mõttes) ristlõike läbimõõtu  $d$ . Varda ristlõike pindala on siis  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ .

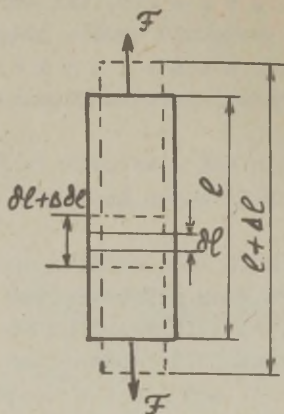
Jõu  $F$  mõjul varda pikkus  $l$  muutub  $\Delta l$  võrra (joon. 6:2). Iga suvaliselt valitud vardaelement  $\delta l$  venib nii, et  $\frac{\Delta(\delta l)}{\delta l}$  jääb samaks. Seepärast valitaksegi venitusedeformatsiooni näitajaks varda pikkuse suhteline muutus (suhteline pikenemine)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (6.1)$$

Suhteline pikenemine on nimeta suurus, kusjuures venitusel  $\varepsilon > 0$ , kokkusurumisel  $\varepsilon < 0$ .

Katsed näitavad, et elastsete deformatsioonide puhul

a)



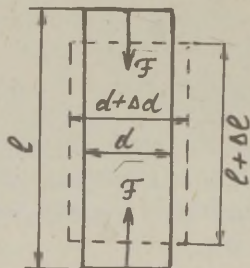
$$\varepsilon = \alpha \frac{F}{S} \quad (6.2)$$

kus  $\alpha$  on antud varda materjali elastseid omadusi väljendav võrdetegur (elastsustegur).

$\frac{F}{S} = \sigma$  on ristlõike kohta arvestatud normaalpinge (pinge  $S$  ühikuks on  $Nm^{-2}$ ), seega

$$\varepsilon = \alpha \sigma \quad (6.3)$$

b)



Joon. 6:2.

mida nimetatakse elastsusmooduliks (ka Young'i<sup>III</sup> mooduliks). Elastsusmoodul  $E$  on arvuliselt võrdne pingega, mille puhul  $\varepsilon = 1$ , s.o.  $\Delta l = l$ .

Valemi (6.3) võime nüüd kirjutada kujul

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (6.3')$$

<sup>III</sup> Robert Hooke (1635-1703), inglise astronoom ja matemaatik.

<sup>IV</sup> Thomas Young (1773-1829), inglise arst ja füüsik.

Valemitest (6.1) - (6.3) järgneb, et

$$\Delta l = \frac{l F}{E S}, \quad (6.3'')$$

s.o. et elastse venituse korral keha pikenemine on võrdeline venitava jõuga (Hooke'i seaduse üks formulatsioone).

Väljavenitatud varda pikenemisega kaasneb tema ristlõike mõõtude vähenemine (läbimõõt muutub  $\Delta d$  võrra väiksemaks). Seda muutust iseloomustatakse ka suhtelise suurusega

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

kusjuures venitusel  $\varepsilon' < 0$ , kokkusurumisel  $\varepsilon' > 0$ . Niisiis mõlema deformatsiooni korral on  $\varepsilon$  ja  $\varepsilon'$  vastasmärgilised.

Eksperimendist nähtub, et

$$\varepsilon = -\mu \varepsilon', \quad (6.4)$$

kus  $\mu$  on positiivne koefitsient, mida nimetatakse Poissoni<sup>\*</sup> koefitsiendiks.

### 6.3. Elastne nihe

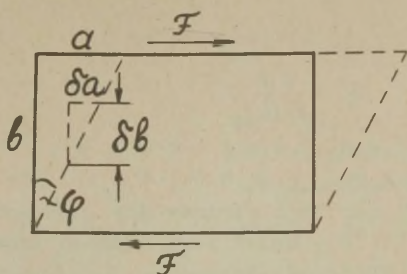
Vaatleme risttahukakujulist keha (joon. 6:3), mille kahele vastastahule on rakendatud nendega paralleelsed võrdvastupidised jõud  $F$ . Niisuguse mõju tulemusena tekib nn. nihkedeformatsioon. Kui jõudude  $F$  mõju on ühtlaselt jaotatud kogu tahu pindala  $S$  ulatuses, siis nende tahkudega paralleelses suvaliselt valitud lõikes tekib tangentsiaalne pinge

$$\tau = \frac{F}{S}$$

---

<sup>\*</sup> Denis Poisson (1781-1840), prantsuse matemaatik.





Joon. 6:3.

Deformatsiooni tulemuseks on ülemise tahu nihkumine alumise suhtes  $a$  võrra. Kui jaotada mõttes risttahukas elementaarkihtideks paksusega  $\delta b$ , siis nende kihtide pinnad liiguvad üksteise suhtes  $\delta a$  võrra, kusjuures  $\frac{\delta a}{\delta b}$  on sama kõikide kihtide jaoks. Seepärast iseloomustataksegi nihkedeformatsiooni suhtega

$$\frac{a}{b} = \tan \varphi = \gamma, \quad (6.5)$$

mida nimetatakse suhteliseks nihkeks. Nurga  $\varphi$  nimetatakse nihkenurgaks.

Katsed näitavad, et

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (6.6)$$

kus  $G$  on materjali iseloomustav nihkemoodul. Arvuliselt võrdub nihkemoodul pingega, mille puhul  $\varphi = 45^\circ$  ( $\gamma = 1$ ). Seega kehtib Hooke'i seadus ka elastse nihke puhul.

#### Märkused.

1. Arvutused näitavad, et mingi materjali kolme elastisusarakteristiku  $E$ ,  $\mu$  ja  $G$  vahel valitseb seos

$$G = \frac{\mu E}{2(\mu + 1)} \quad (6.7)$$

2. Painde ja väände deformatsioonides sisalduvad elementidena esimeses venitus ja kokkusurumine, teises nihe, ainult palju keerulisemal kujul.

### Ülesanne 6-1.

Traat algpikkusega  $l_0 = 10 \text{ m}$  on ühest otsast kinnitatud ning teise otsa on rakendatud venitav jõud  $F = 20 \text{ kG}$ . Selle jõu mõjul venib traat  $\Delta l = 0,4 \text{ cm}$  pikemaks. Traadi materjali kohta on teada  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG cm}^{-2}$ ,  $G = 0,75 \cdot 10^6 \text{ kG cm}^{-2}$ .

Määrata selle traadi läbimõõdu algväärtus  $d_0$  ja selle muutus venitusel  $\Delta d$ , traadi ruumala muutus  $\Delta V$  ning traadis salvestatud potentsiaalne energia  $W_p$ .

### Lahendus.

Hooke'i seadusest (6.3')

$$\sigma = E \varepsilon \Rightarrow \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$$

saame

$$S = \pi \frac{d_0^2}{4} = \frac{F l_0}{E \Delta l}$$

ning

$$\begin{aligned} d_0 &= 2 \sqrt{\frac{F l_0}{\pi E \Delta l}} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{20 \text{ kG} \cdot 10 \text{ m}}{\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10^4 \text{ kG m}^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}}} = \underline{\underline{1,78 \cdot 10^{-3} \text{ m}}} \end{aligned}$$

Pikkuse ja läbimõõdu suhtelised muutused  $\varepsilon$  ja  $\varepsilon'$  on seotud Poissoni koefitsiendi  $\mu$  kaudu (6.4):

$$\varepsilon = \mu \varepsilon' \quad \text{ehk} \quad \frac{\Delta l}{l_0} = -\mu \frac{\Delta d}{d_0}$$

Poissoni koefitsiendi aga saab määrata seosest (6.7)

$$G = \frac{\mu E}{2(\mu + 1)},$$

rust

$$\mu = \frac{2G}{E - 2G}$$

Seega

$$\begin{aligned}\Delta d &= -\frac{d_0 \Delta l}{l_0 \mu} = \frac{-d_0 \Delta l (E - 2G)}{l_0 \cdot 2G} = \\ &= \frac{-1,78 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 0,5 \cdot 10^6 \text{ kg cm}^{-2}}{10 \text{ m} \cdot 2 \cdot 0,75 \cdot 10^6 \text{ kg cm}^{-2}} = \underline{\underline{-2,37 \cdot 10^{-7} \text{ m}}}\end{aligned}$$

Traadi ruumala muutus

$$\begin{aligned}\Delta V &= V - V_0 = \frac{\pi (d_0 + \Delta d)^2 (l_0 + \Delta l)}{4} - \frac{\pi d_0^2 l_0}{4} = \\ &= \frac{\pi}{4} (d_0^2 l_0 + 2 d_0 l_0 \Delta d + l_0 [\Delta d]^2 + d_0^2 \Delta l + 2 d_0 \Delta d \Delta l + \\ &\quad + [\Delta d]^2 \Delta l - d_0^2 l_0)\end{aligned}$$

Jätnud ära teist ja kolmandat järku väikesed liikmed, saame

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{\pi}{4} (d_0^2 \Delta l - 2 d_0 l_0 \Delta d) = \\ &= \frac{\pi}{4} (1,78 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} + 2 \cdot 1,78 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 10 \text{ m} \cdot 2,37 \cdot 10^{-7} \text{ m}) = \\ &= \underline{\underline{3,22 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3}}\end{aligned}$$

Deformatsiooni potentsiaalne energia

$$W_p = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{20 \cdot 9,81 \text{ N} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2} = \underline{\underline{0,39 \text{ J}}}$$



## 7. HÕORDEJÕUD

Hõordejõud tekivad iga kord, kui kaks kokkupuutuvat keha või sama keha kaks kokkupuutuvat osa nihkuvad teineteise suhtes. Esimesel juhul, kui on tegemist kahe erineva kehaga, räägitakse välisest ning ühe keha kahe naaberosa vahel sisest. Tahke keha ja vedeliku (või gaasi) vahel esineb sisehõõre. Kahe tahke keha puhul, kui pinnad pole õlitatud, on tegemist kuiva, tahke keha ja vedeliku (või gaasi) vahel ning vedeliku kihtide vahel aga märja ehk viskoosse hõõrdega. Kahe kokkupuutuva tahke keha korral võib üks nendest kas libiseda või veereda teise keha pinnal, vastavalt sellele räägitakse liugumis- või veeremishõõrdest, kusjuures mõlemal juhul on tegemist kuiva hõõrdega.

Hõordejõud asuvad alati kokkupuutuvate (hõõrduvate) pindade puutetasapinnas ning nende suund on selline, et nad takistavad kehade vastastikust nihkumist.

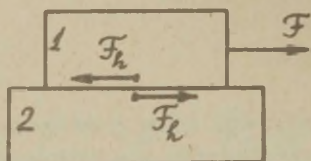
### 7.1. Kuiv hõõre

Kahe kokkupuutuva tahke keha vahel tekib hõordejõud mitte ainult siis, kui kehad (juba) libisevad üksteise suhtes, vaid ka siis, kui püütakse niisugust liikumist esile kutsuda ja kehad asuvad teineteise suhtes veel paigal. Viimasel juhul on tegemist paigaloleku hõõrdega.

Kui püüda nihutada keha (1) mööda paigaloleva keha (2) pinda (joon. 17:1), rakendades järjest kasvavat jõudu  $F$ , siis algab liikumine selle jõu teatud väärtuse  $F_0$  juures



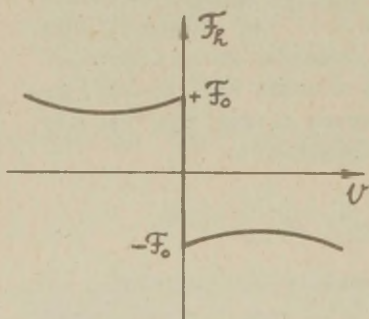
(seni kuni  $F < F_0$  on keha (1) paigal).  $F_0$  märgib paigaloleku hõõrdejõu maksimaalset väärtust.



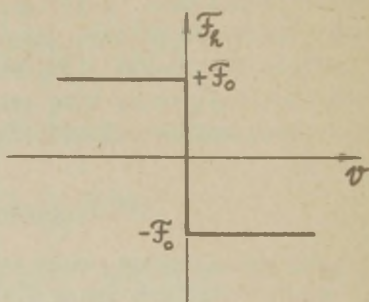
Joon. 7:1.

Kui rakendatud jõud  $F$  ületab  $F_0$ , algab libisemine, mille kiirenduse määrab rakendatud jõud  $F$  ja hõõrdejõu  $F_h$  vahe  $F - F_h$ . Hõõrdejõu  $F_h$  väärtus sõltub vähesel määral liikumise kiirusest (selle sõltuvuse kõige sagedamini esine-

vat iseloomu praktikas kujutab joon. 7:2). Kui kokkupuutuvate (hõõrduvate) pindade omadused libisemise protsessis ei muutu (ei toimu näiteks silumist, temperatuuri muutust, oksüdeerumist vms.), siis kiiruse muutudes jääb hõõrdejõud konstantseks (joon. 7:3). Kokkupuutepindade suurus kuiva



Joon. 7:2.



Joon. 7:3.

hõõrde puhul ei avalda mõju hõõrdejõule ning hõõrdejõud on ligikaudu võrdeline normaalarõhumisega  $F_n$ :

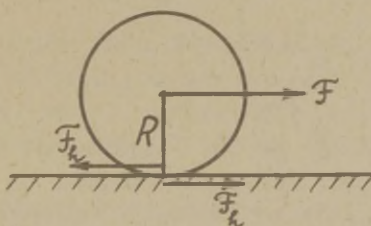
$$F_h = k F_n \quad (7.1)$$

Võrdetegurit  $k$  nimetatakse hõõrdeteguriks ning liugumisel on see nimeta suurus, mille väärtus sõltub hõõrduvate

pindade iseloomust (praktiliselt vahel ka kiirusest).

Veeremisel aga sõltub hõõrdejõud veel veereva keha raadiusest  $R$  (joon. 7:4)

$$F_h = \kappa' \frac{F_n}{R} \quad (7.2)$$



Joon. 7:4.

Veeremise hõõrdetegur  $\kappa'$  on pikkuse mõõtühikutes avalduv suurus, mille väärtus sõltub ikka pindade iseloomust.

Hõõrdejõud veeremisel on alati väiksemad kui liugumisel (siit kuullaagrite kasutamise idee).

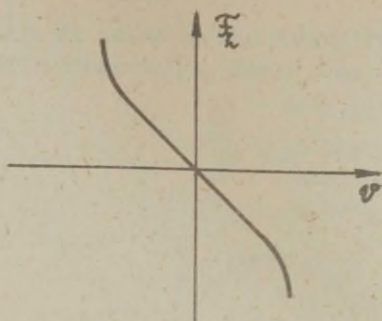
## 7.2. Viskoosne hõõre

Erinevalt kuivast hõõrdest muutuvad viskoosse hõõrde korral hõõrdejõud nulliks koos kiirusega. Seepärast tekivad isegi väga väikesed välised jõud kihtide nihkumise. Joonisel 7:5 on kujutatud tüüpiline sõltuvus  $F_h(v)$  tahke keha ja vedeliku vahel. Tahke keha liikudes vedelikus kiirusega  $v$  väikeste kiiruste puhul

$$F_h = \kappa_1 v, \quad (7.3)$$

suuremate kiiruste juures

$$F_h = \kappa_2 v^2 \quad (7.4)$$



Joon. 7:5.

Hõõrdetegurid  $\kappa_1$  ja  $\kappa_2$  valemities (7.3) ja (7.4) sõltuvad väga suurel määral keha kujust ja mõõtmetest, tema pinna iseloomust ning vedeliku viskoossusest omadustest.

## 8. LIIKUMINE MITTEINERTSIAALSETES SÜSTEEMIDES

Alustades ainepunkti kinemaatikat defineerisime inert-siaalset taustsüsteemi kui sellist, mis on seotud vabalt liikuva kehaga. Samuti on inertsiaalne iga süsteem, mis liigub inertsiaalse süsteemi suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt.

Liikumise relatiivsuse printsiibi kohaselt kulgevad füüsikalised nähtused kõikides inertsiaalsetes süsteemides ühtemoodi.

Kui vaadeldav taustsüsteem liigub inertsiaalse süsteemi suhtes mitteühtlaselt või kõverjooneliselt, on see süsteem mitteinertsiaalne ning liikumine ja selle kirjeldamine niisuguse süsteemi suhtes osutub märksa keerukamaks, kui see on inertsiaalsetes süsteemides.

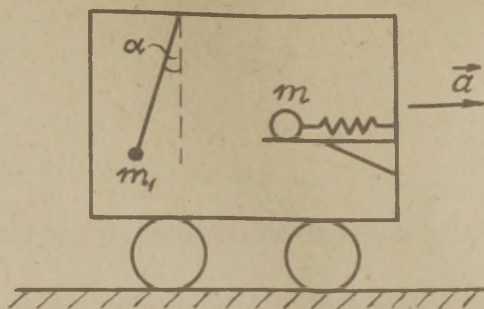
### 8.1. Inertsijõud kulgevas süsteemis

Mööda sirget teed mingi kiirendusega  $\vec{a}$  liikuvast vagunis (joon. 8:1) horisontaalsel riiulil olev kuulike  $m$  hakkab veerema tahapoole ning kukub üle riiuli ääre pörandale.

Kui tahetakse, et kuulike püsiks riiulil paigal, peab selle kinnitama vaguni seina külge näiteks vedru abil, mis vaguni kiireneval liikumisel osutub väljavenitatuks, rakendades seega kuulikesele mingit jõudu  $\vec{F}$ .

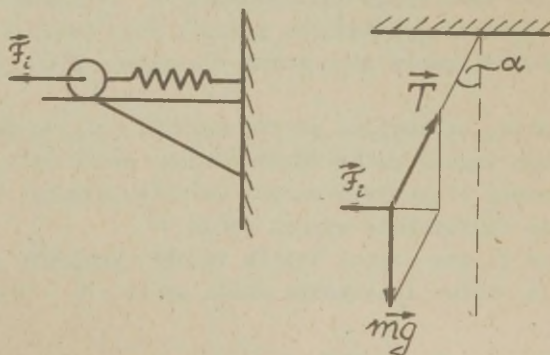
Vaguni laes rippuv pendel kaldub samuti tahapoole ning jääb tasakaalu, olles kallutatud mingi nurga  $\alpha$  võrra





Joon. 8:1.

vertikaali suhtes. Kui vagun oleks paigal või ühtlases sirgliikumises Maa kui inertsiaalsüsteemi suhtes, oleks kuulike riiulil paigal ning pendel ripuks vertikaalselt. Seega on ilmne, et niisuguses vagunis kui mitteinertsiaalses süsteemis Newtoni liikumisreedused tavalisel kujul ei kehti. Selleks et oleks võimalik rakendada Newtoni seadusi, tuuakse sisse inertsijõud. Antud juhul öeldakse, et kiirendusega  $\vec{a}$  liikuvast vagunis riiulil olevale kuulikesele mõjub inertsijõud  $\vec{F}_i = -m\vec{a}$ , s.o. jõud, mille väärtus määratakse Newtoni II seaduse järgi ning mille suund on vastupidine süsteemi kiirenduse suunaga. Nüüd saab mõlema keha jaoks kirjutada Newtoni I seaduse tavalisel kujul (joon. 8:2):



Joon. 8:2.

- a) Kuulikesele  $m$  mõjub kaks jõudu  $\vec{F}$  ja  $\vec{F}_i$  ning
- $$\vec{F}_i + \vec{F} = 0 \quad (8.1)$$

määrab kuulikese paigaloleku.

- b) Pendli kuulikesele  $m_1$  mõjub kolm jõudu ( $T$  on niidi tõmme) ning
- $$\vec{F}_i + \vec{T} + m_1 \vec{g} = 0 \quad (8.2)$$

määrab pendli tasakaaluoleku.

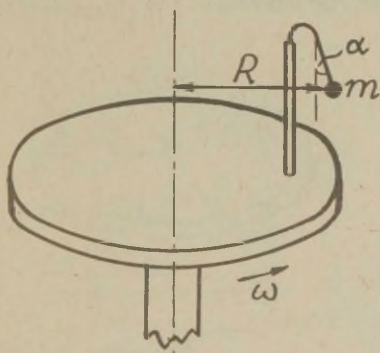
Newtoni II seadus mitteinertsiaalse süsteemi puhul avaldub valemiga

$$\vec{F}_i + \vec{F} = m \vec{w}, \quad (8.3)$$

kus  $\vec{F}$  on kehale mõjuvate väliste jõudude resultant,  $\vec{w}$  - keha kiirendus mitteinertsiaalse süsteemi suhtes.

## 8.2. Inertsijõud pöörlevas süsteemis

1. Kujutame nurkkiirusega  $\omega$  pöörleval pingil hoidja



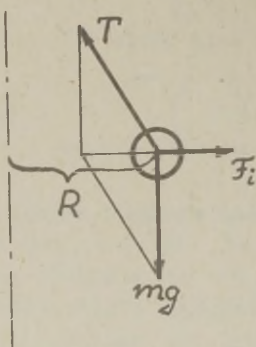
Joon. 8:3.

abil rippuvat pendlit massiga  $m$ . Tasakaaluolekus moodustab pendel nurga  $\alpha$  vertikaalsihiga (joon. 8:3). Selle põhjuseks on jällegi süsteemi kiirenev liikumine (seekord pöörlemine) ning sellest tingitud inertsijõud, mis on

suunatud mööda raadiust väljapoole ning mille väärtus

$$F_i = m \omega^2 R \quad (8.4)$$

( $\omega^2 R$  on ühtlaselt nurkkiirusega  $\omega$  mööda ringjoont raadiusega  $R$  liikuva punkti kiirendus - tsentripetaalkiirendus, mis on suunatud mööda raadiust tsentri poole). Pendli



kuulikesele mõjub nüüd kolm jõudu: raskusjõud  $\vec{mg}$ , inertsi jõud  $\vec{F}_i$  ja niidi tõmme  $\vec{T}$  (joon. 8:4) ning pendli tasakaalutingimuseks on

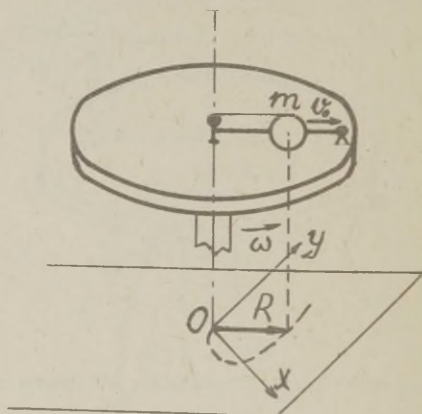
$$\vec{F}_i + \vec{mg} + \vec{T} = 0 \quad (8.5)$$

Joon. 8:4.

2. Vaatleme juhtu, kus keha massiga  $m$  liigub ühtlaselt kiirusega  $v_0$  mööda ühtlaselt nurkkiirusega  $\omega$  pöörlevat ketast selle raadiuse suunas (joon. 8:5). Sellele kehale mõjuvate inertsijõudude väljaselgitamiseks arvutame tema kiirenduse liikumatu koordinaatide süsteemi  $(x, y)$  suhtes.

Ajamoendil  $t$  on keha kaugusel  $R$  pöörlemisel - teljest (keha asukoht tasapinnal  $(x, y)$  on määratud vektoriga  $\vec{R}$ ). Keha kiirus liikumatu koordinaadistiku suhtes koosneb kahest komponendist:

- 1) radiaalne  $\vec{v}_0$  - suunatud mööda  $\vec{R}$ ,
- 2) tangentsiaalne  $[\vec{\omega} \vec{R}]$  - risti raadiusega  $\vec{R}$



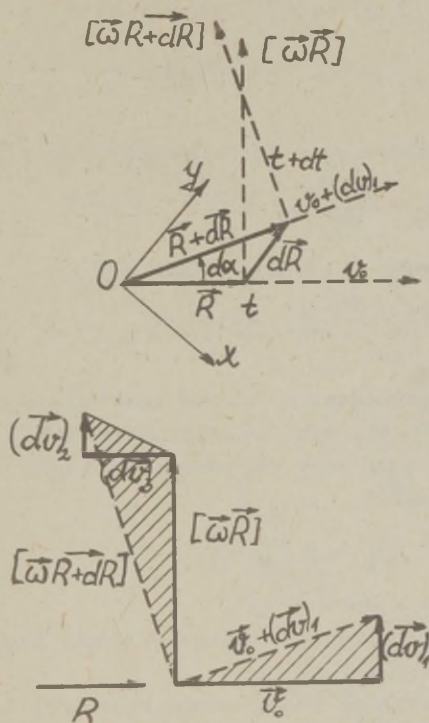
Joon. 8:5.

Ajamoendil  $t+dt$  on mõlemad komponendid pöördunud nurga

$$d\alpha = \omega dt$$

võrra (joon. 8:6). Kiiruse radiaalne komponent väärtuse poolest ei muutu, tangentsiaalne aga saab juurdekasvu

$$\omega dR = \omega v_0 dt$$



Joon. 8:6.



Joonisest 8:6,b nähtub, et kiiruse juurdekasv ajavahemikus  $dt$  koosneb kolmest komponendist:  $(d\vec{v})_1$ ,  $(d\vec{v})_2$  ja  $(d\vec{v})_3$ , kusjuures  $(d\vec{v})_1$  ja  $(d\vec{v})_2$  on risti raadiusega ning samasuunalised (suunatud mööda kiiruse tangentsiaalset komponenti  $[\vec{\omega} R]$ ). Kolmas komponent  $(d\vec{v})_3$  aga on suunatud mööda raadiust  $R$  pöörlemistelje poole.

Samalt jooniselt (8:6) saame lugeda:

$$(dv)_1 = v_0 d\alpha = v_0 \omega dt$$

$$(dv)_2 = \omega(R+dR) - \omega R = \omega v_0 dt$$

$$(dv)_3 = \omega R d\alpha = \omega R \omega dt = \omega^2 R dt$$

Siit järgneb kiirenduse radiaalse komponendi väärtus

$$w_r = \frac{(dv)_3}{dt} = \frac{\omega^2 R dt}{dt} = \omega^2 R$$

ning samuti tangentsiaalse komponendi väärtus

$$w_t = \frac{(dv)_1 + (dv)_2}{dt} = \frac{2\omega v_0 dt}{dt} = 2\omega v_0$$

Esimene komponentidest on võrdne tsentripetaalkiirendusega. Teine komponent on risti raadiusega (seega ka kiirusega  $\vec{v}_0$ ) ning seda saab väljendada vektorite  $\vec{\omega}$  ja  $\vec{v}_0$  vektorkorrutise abil

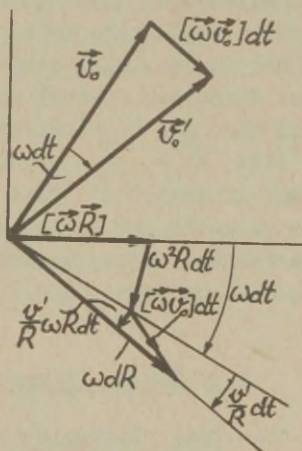
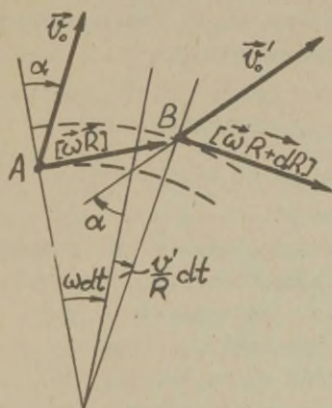
$$\vec{w}_t = 2 [\vec{\omega} \vec{v}_0] \quad (8.6)$$

Seda kiirenduse komponenti nimetatakse Coriolise<sup>III</sup> kiirenduseks.

Coriolise kiirenduse valemi saame samal kujul ka üldisemal juhul, kui keha liigub mööda pöörlevat ketast jääva kiirusega suvaliselt valitud suunas (mitteradiaalselt). Selle

<sup>III</sup> Gaspard Coriolis (1792-1843), prantsuse insener ja matemaatik.

tõestuseks vaatleme joonist 8:7. Joonisel 8:7,a kujutab punkt  $A$  liikuva keha asukohta ajamomendil  $t$ . Keha kiirus (liikumatu süsteemi suhtes) koosneb kahest komponendist  $\vec{v}_0$  ja  $[\vec{\omega} \vec{R}]$ . Ajamomendil  $t+dt$  on keha asendis  $B$  ning tema kiiruse komponendid on  $\vec{v}_0'$  ja  $[\vec{\omega} \vec{R}+d\vec{R}]$  ning viimane pööratud nurga  $(\omega + \frac{\psi'}{R})dt$  võrra sama komponendi suhtes ajamomendil  $t$ , kus  $\vec{v}'$  on kiiruse  $\vec{v}_0'$  raadiusega risti olev komponent.



Joon. 8:7.

Joonisel 8:7,b on kõik kiiruste vektorid kantud ühte punkti ning näidatud kiiruste juurdekasvud ajavahemikus  $dt$ . Sellelt jooniselt saame lugeda:

$$w_c = \omega^2 R$$

ja

$$w_t = 2[\vec{\omega} \vec{v}_0]$$

Niisiis, kiirenduse analüüs (tehtud inertsiaalsüsteemis asuva vaatleja seisukohalt) näitab kiirenduse kahe komponendi olemasolu, mis osutab asjaolule, et kehale peab mõjuma kaks jõudu, mis need kiirendused tingivad:

$f_c = m\omega^2 R$  - tsentripetaaljõud, mõõda raadiust tsentri poole suunatud;

$f_t = m 2\omega v_0$  - risti raadiusega mõjuv (pöörav) jõud.

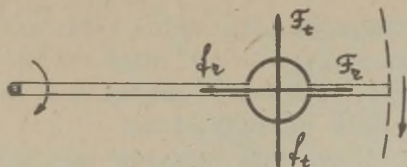
Vaatleme nüüd kõike toimuvat pöörlevas süsteemis asuva vaatleja seisukohalt. Ketta suhtes liigub keha ühtlaselt ja sirgjooneliselt, nagu ei mõjuks temale ükski jõud. Tegelikult aga mõjub liikuvale kehale kaks jõudu -  $f_c$  ja  $f_t$ , esimene on suunatud mõõda raadiust tsentri poole, teine risti raadiusega ketta pöörlemise suunas.

Selleks et dünaamika seadused kehtiksid ka pöörlevas (kettaga ühenduses olevas) süsteemis, tuuakse sisse kaks inertsijõudu, mis on suunalt vastupidised jõududele  $f_c$  ja  $f_t$ : jõud  $\vec{F}_c = -\vec{f}_c$  suunatud mõõda raadiust väljapoole (tsentrifugaaljõud), jõud  $\vec{F}_t = -\vec{f}_t$  suunatud risti raadiusega ketta pöörlemisele vastu (Coriolise jõud). Mõlemad inertsijõud on rakendatud kuulikesele ning tasakaalustuvad kahekaupa (joon. 8:8).

### 8.3. Kehade liikumisest Maa peal

Maa ööpäevase pöörlemise tõttu on Maaga seotud taustsüsteemid pöörlevad mitteinertsiaalsed süsteemid, milles ilmnevad nii tsentrifugaal- kui ka Coriolise jõud:





Joon. 8:8.

1) Coriolise jõudude mõju näeme selles, et Maa põhjapoolkeral ühesuunaliste raudteede parempoolne roogas kulub enam kui teine, samuti on siin jõgede parempoolne kallas uhutud. Seejuures ei sõltu nähtused rongi liikumise ega jõe voolu suunast. Lõunapoolkeral kannatavad selle mõju all vasakpoolsed roopad ja jõgede vasakpoolsed kaldad.

2) Kehade vabalangemisel maapinnale kutsub nendele kehadele mõjuv Coriolise jõud esile kõrvalekaldumise ida suunas vertikaalist. Niisugune kõrvalekaldumine on täpsete eksperimentide abil kindlaks tehtud.

3) Foucault<sup>2</sup> korraldas 1852.aastal katse, milles näitas, et pendli võnketasapind muudab oma asendit Maa suhtes. Nähtus on seletatav sellega, et pendel säilitab oma võnketasapinna, Maa pöörlemise tõttu aga see näib muutuvat Maa suhtes.

---

<sup>2</sup> Leon Foucault (1819-1868), prantsuse füüsik.



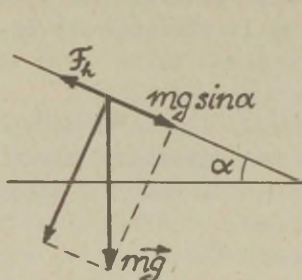
### Ülesanne 8-1.

Vagun veereb raskusjõu mõjul mööda teed, mis algul moodustab horisondiga nurga  $\alpha = 30^\circ$  ning hiljem läheb üle horisontaaltasandiks. Hõõrdejõud moodustavad liikumise mõlemal etapil  $\eta = 20\%$  vaguni kaalust.

Vaguni lakke on niidi abil riputatud kuulike massiga  $m = 10\text{ g}$ . Määrata niidi suund ja teda pingutav jõud mõlema liikumise korral.

### Lahendus.

I. Liikumise esimesel etapil joonisel 8:9  $M$  tähistab vaguni massi. Hõõrdejõud



Joon. 8:9.

$$F_h = \eta Mg$$

Liikumapanev jõud on

$$F_1 = Mg \sin \alpha - \eta Mg = -Mg (\sin \alpha - \eta)$$

ning vaguni liikumise kiirendus

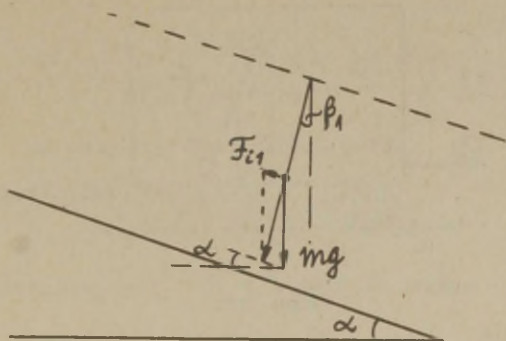
$$a_1 = \frac{F_1}{M} = g (\sin \alpha - \eta)$$

Niidile mõjuv jõud  $\vec{F}_1$  (joon. 8:10) on raskusjõu  $\vec{m}\vec{g}$  ja inertsijõu  $\vec{F}_1 = -\vec{m}\vec{a}_1$  summa:

$$F_1^2 = (mg)^2 + (ma_1)^2 - 2mgma_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$F_1 = mg \sqrt{1 + (\sin \alpha - \eta)^2 - 2(\sin \alpha - \eta) \sin \alpha},$$

$$F_1 = 10^{-2} \text{ kg } 9.81 \text{ m s}^{-2} \sqrt{1 + 0.3^2 - 2 \cdot 0.3 \sin 30^\circ} = \underline{\underline{0.0874 \text{ N}}}$$



Joon. 8:10.

Nurga  $\beta_1$  määrame samast jõudude rõõpkülikust:

$$\begin{aligned}\frac{F_{i1}}{\sin \beta_1} &= \frac{f_1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}, \\ \sin \beta_1 &= \frac{F_{i1} \cos \alpha}{f_1} = \frac{m(\sin \alpha - \eta)g \cos \alpha}{f_1} = \\ &= \frac{10^{-2} \text{ kg} \cdot 0,3 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 0,865}{0,0874 \text{ N}} = 0,0292 \\ \beta_1 &= 1^\circ 40'\end{aligned}$$

II. Liikumise teisel etapil (joon. 8:11) kutsus hõõrde-  
jõud  $F_h = \eta mg$  esile kiirenduse

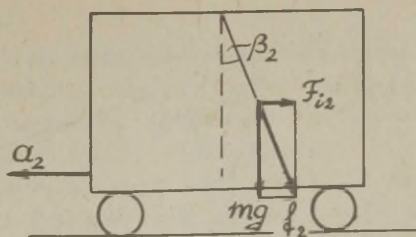
$$a_2 = \frac{F_h}{m} = \eta g$$

Niiti pingutav jõud  $T_2$  on raskusjõu  $\vec{mg}$  ja inertsijõu

$$\vec{F}_{i2} = -m\vec{a}_2$$

summa:

$$f_2^2 = (mg)^2 + (mg\eta)^2,$$



Joon. 8:11.

$$f_2 = mg \sqrt{1 + \eta^2} = 10^{-2} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \sqrt{1 + 0,04} = \underline{\underline{0,10 \text{ N}}}$$

$$\tan \beta_2 = \frac{mg\eta}{mg} = \eta = 0,2$$

$$\beta_2 = \underline{\underline{11^\circ 35'}}$$

#### Ülesanne 8-2.

Raske keha massiga  $m = 1 \text{ kg}$  langeb vabalt  $z = 4 \text{ s}$  kestel ning saabub maapinnale punkti, kus geograafiline laius  $\varphi = 45^\circ$ .

Arvestades Maa pöörlemist, määrata

- 1) kõik kehale mõjuvad jõud langemise lõppmomendil,
- 2) keha langemispunkti asend maapinnal tema lähtepunktist tõmmatud vertikaali aluspunkti suhtes.

#### Lahendus.

- 1) Kehale mõjub kolm jõudu:

- a) Gravitatsioonijõud (5.3)

$$G = \gamma \frac{Mm}{R^2},$$

kus gravitatsioonikonstant  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , Maa raadius  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$  ning Maa mass  $M = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .



Seega

$$G = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{6,37^2 \cdot 10^{12} \text{ m}^2} = \underline{\underline{9,82 \text{ N}}}$$

Vektor  $\vec{G}$  on suunatud Maa tsentri poole.

b) Tsentrifugaaljõud

$$f = m \omega^2 r = \frac{m 4 \pi^2 R \cos \varphi}{T^2},$$

kus Maa tiirlemisperiood  $T = 24 \cdot 3600 \text{ s}$ , seega

$$f = \frac{1 \text{ kg} \cdot 4 \pi^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \sqrt{2}}{2,4^2 \cdot 3,6^2 \cdot 10^8 \text{ s}^2 \cdot 2} = \underline{\underline{2,38 \cdot 10^{-2} \text{ N}}}$$

Vektor  $\vec{f}$  on suunatud mööda tiirlemise raadiust  $r$  väljapoole.

c) Coriolise jõud (8.6)

$$\vec{F}_c = -2m[\vec{\omega} \vec{v}]$$

Et langemise kiiruse vektor  $\vec{v}$  moodustab Maa nurkkiiruse vektori  $\vec{\omega}$  -ga nurga  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ , siis

$$\sin(\widehat{\vec{\omega} \vec{v}}) = \cos \varphi$$

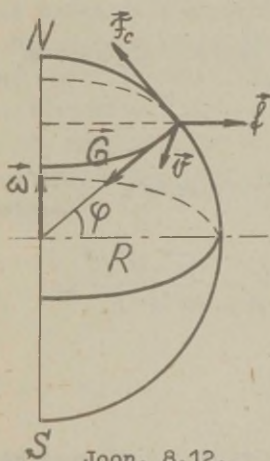
ning

$$F_c = 2m\omega v \cos \varphi$$

Kuna  $v = g\tau$  ning  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,

kus Maa pöörlemisperiood

$T = 24 \cdot 3600 \text{ s}$ , siis



Joon. 8.12.

$$F_c = \frac{4m \pi g \tau \cos \varphi}{T} =$$

$$= \frac{4 \cdot 1 \text{ kg} \cdot \pi \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 4 \text{ s} \sqrt{2}}{2,4 \cdot 3,6 \cdot 10^4 \text{ s} \cdot 2} = \underline{\underline{4,04 \cdot 10^{-3} \text{ N}}}$$



Vektor  $\vec{F}_c$  on suunatud ida poole (mööda punkti tiirlemisaringjoone puitujat).

2) Coriolise jõu mõjul kaldub keha langedes ida poole, kusjuures igal suvalisel ajamomendil idasuunaline kiirendus

$$w_c = 2\omega v \cos \varphi$$

Et  $v = gt$ , siis

$$w_c = 2\omega g t \cos \varphi$$

Kõrvalekaldumise määra (ulatus) ajamomendil  $\tau$

$$s = \int_0^{\tau} v_c dt,$$

kus

$$v_c = \int_0^t w_c dt = 2\omega g \cos \varphi \int_0^t t dt = \omega g \cos \varphi t^2,$$

järelikult

$$\begin{aligned} s &= \omega g \cos \varphi \int_0^{\tau} t^2 dt = \frac{1}{3} \omega g \cos \varphi \tau^3 = \\ &= \frac{2\pi g \cos \varphi \tau^3}{3T} = \frac{2\pi \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \sqrt{2} \cdot 4^3 \text{ s}^3}{3 \cdot 2,4 \cdot 3,6 \cdot 10^4 \text{ s} \cdot 2} = \\ &= \underline{\underline{1,08 \cdot 10^{-2} \text{ m}}} \end{aligned}$$

Keha langemispunkt asub  $1,08 \text{ cm}$  ida pool vertikaali aluspunktist.

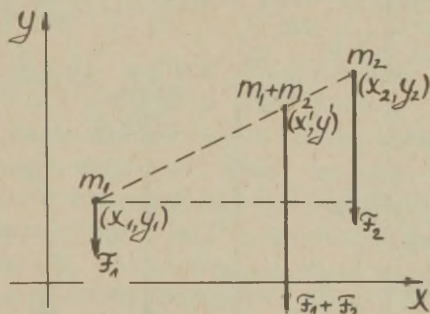
## 9. AINEPUNKTIDE SÜSTEEMI JA KINDLA KEHA DÜNAAMIKA

### 9.1. Masskese

Ainepunktide süsteemi masskese on punkt, mis iseloomustab masside jaotust antud süsteemis. Süsteemi liikudes liigub selle masskese nii, nagu liiguks ainepunkt, mille mass on võrdne süsteemi summaarse massiga ning millele on rakendatud kõik süsteemile mõjuvad jõud.

Masskeskme koordinaadid ühtivad süsteemi osadele mõjuvate paralleelsete jõudude (ka raskusjõudude) tsentri koordinaatidega. Seega saab masskeskme koordinaate määrata kui raskuskeskme koordinaate.

Ainepunktide süsteemi masskeskme leidmine. Vaatleme tasapinnas  $(x, y)$  (joon. 9:1) asuvat kahest ainepunktist



Joon. 9:1.

$m_1(x_1, y_1)$  ja  $m_2(x_2, y_2)$  koosnevat süsteemi.  $m_1$  ja  $m_2$  on ainepunktide massid,  $x_1, y_1, x_2, y_2$  - nende koordinaadid teljestikus  $(x, y)$ . Oletame, et see süsteem asub homogeenses jõuväljas, kusjuures ainepunktidele mõjuvad jõud on võrdelised nende massiga ning suunatud  $y$ -telje vastassuunas:

$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{a},$$

$$\vec{F}_2 = m_2 \vec{a}.$$

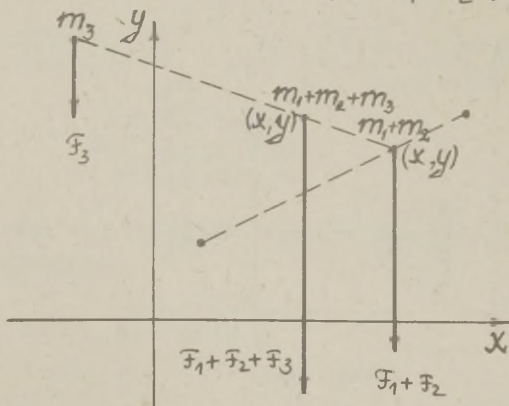
(Niisuguseks väljaks võiks olla näiteks Maa raskusväli, kui punktide vahemaa on suhteliselt väike ning telg  $y$  suunatud vertikaalselt üles.) Jõudude  $\vec{F}_1$  ja  $\vec{F}_2$  resultant läbib punkti  $m_1 + m_2$ , mille koordinaadi  $x'$  saame määrata suhtest

$$\frac{x_2 - x'}{x' - x_1} = \frac{m_1}{m_2},$$

millest järgneb

$$x' = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Kui vaadeldud süsteemile lisada kolmas punkt  $m_3(x_3, y_3)$  (joon. 9:2) ning seejärel liita jõud  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  ja  $\vec{F}_3 = m_3 \vec{a}$ ,



Joon. 9:2.

saame jõu  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  mõjusirge koordinaadiks

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$n$  ainepunktist koosneva süsteemi korral on see tulemus järgmine:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Kui sama jõuväli on suunatud  $x$ -telje vastu, saame resultantjõu koordinaadi

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Vaadeldes ruumis paiknevat ainepunktide süsteemi  $m_i(x_i, y_i, z_i)$ , saame leida punkti, kus lõikuvad kõikidele ainepunktidele mõjuvate mistahes suunaliste paralleelsete jõudude resultantide mõjusirged, s.o. süsteemi masskeskme:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (9.1)$$

Kindlaks kehaks nimetatakse keha, mis ei deformeeru mistahes jõudude mõjul, seega kindlas kehas kaks suvaliselt valitud punkti on alati ühel ja samal kaugusel teineteisest.

Kindlat keha võib vaadelda kui loendamatu hulga ainepunktide süsteemi ning tema üheks oluliseks karakteristikuks on masskese. Kindla keha masskese on põhimõtteliselt sama mis ainepunktide süsteemi masskese. Et aga keha puhul on tegemist aine pideva jaotusega, siis masskeskme koordinaatide valemites asenduvad lõplikud summad integraalsete summadega



$$x = \frac{1}{m} \int_{(V)} \rho x dV; y = \frac{1}{m} \int_{(V)} \rho y dV; z = \frac{1}{m} \int_{(V)} \rho z dV, (9.1')$$

kus  $m$  on keha mass,  $V$  - keha ruumala,  $\rho$  - tihedus.

Kindla keha puhul eristatakse kahte liiki liikumisi: 1) kulgliikumine (translatoorne liikumine) on niisugune liikumine, mille korral suvaliselt valitud kehaga kindlalt ühenduses olev sirge jääb paralleelseks iseendaga. Kulgliikumises liigub kindla keha massikeske nii, nagu liiguks ainepunkt, mille mass on võrdne keha massiga ning millele on rakendatud kõik keha kulgliikumist esilekutsuvad välised jõud; 2) pöörlemine (rotatsioon) on niisugune liikumine, mille korral kõik keha punktid liiguvad mööda ringjooni, nende ringjoonte keskpunktid aga asuvad ühel sirgel, mida nimetatakse pöörlemisteljeks.

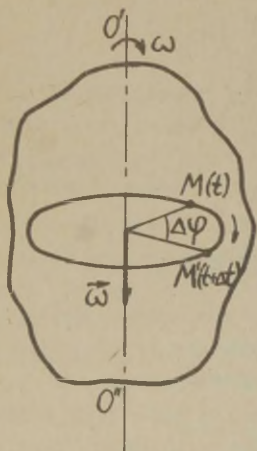
## 9.2. Pöörlemise kinemaatika

Pöörrelgu mingi kindel keha telje  $OO''$  ümber (joon.9:3). Olgu ajamomendil  $t$  selle keha üks suvaliselt valitud punkt asendis  $M$  ning ajamomendil  $t+\Delta t$  asendis  $M'$ . Seega on ajavahemiku  $\Delta t$  kestel keha pöördunud nurga  $\Delta\varphi$  võrra. Keha pöörlemise keskmiseks nurkkiiruseks ajavahemiku  $\Delta t$  jaoks nimetatakse nurga  $\Delta\varphi$  ja aja  $\Delta t$  suhet

$$\omega_k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (9.2)$$

Nurkkiirus ajamomendil  $t$  on

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (9.2')$$



Joon. 9:3.

Kui keha pöörlemisel nurkkiirus muutub, tuleb liikumist kirjeldada suurusega, mis iseloomustaks seda muutumist, s.o. nurkkiirendusega.

Kui ajamomendil  $t$  keha pöörleb nurkkiirusega  $\vec{\omega}$  ning ajamomendil  $t + \Delta t$  on nurkkiiruse väärtus  $\vec{\omega} + \Delta\vec{\omega}$ , siis ajavahemiku  $\Delta t$  jaoks arvestatud keskmine nurkkiirendus

$$\vec{\epsilon}_k = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \quad (9.3)$$

ning ajamomendile  $t$  vastav nurkkiirendus

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (9.3')$$

Nurkkiirendus on aksiaalvektor, mille suund ühtib nurkkiiruse suunaga viimase kasvades ning on vastupidine sellega nurkkiiruse kahanedes.

Nurkkiirenduse mõõtühikuks on  $\text{rad. s}^{-2} = \text{s}^{-2}$ .

Kui  $\epsilon = \text{const}$ , on pöörlemine ühtlaselt kiirenev ning kehtivad seosed

Nurkkiirus  $\omega$  on aksiaalvektor, mille suund määratakse parema käe kruvi reegli järgi.

Nurkkiiruse ühikuks on  $\text{rad. s}^{-1} = \text{s}^{-1}$ .

Kui  $\omega = \text{const}$ , on pöörlemine ühtlane. Sel juhul

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

kus  $\varphi$  on nurk, mille võrra keha on pöördunud ajamomendiks  $t$  ning  $\varphi_0$  on pöördenuk, mis vastab momendile, mil antud ülesandes hakatakse aega lugema.

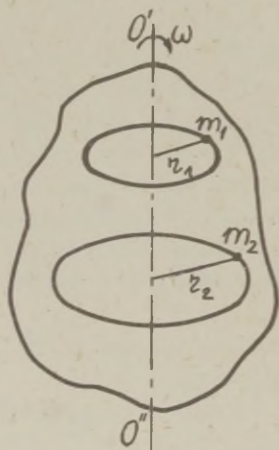
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t \quad (9.4)$$

ja

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2}, \quad (9.5)$$

kus  $\vec{\varphi}_0$  ja  $\vec{\omega}_0$  on ajamomendile null vastavad suurused.

### 9.3. Pöörleva keha kineetiline energia



joon. 9:4

Kui mingi kindel keha pöörleb ümber telje  $O'O''$  nurkkiirusega  $\omega$ , siis selle keha kõik punktid liiguvad mööda vastavaid ringjooni sama nurkkiirusega (joon. 9:4). Kui vaadelda keha koosnevana ainepunktidest massidega  $m_1, m_2, \dots, m_n$  ning nende trajektootide raadiused on  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , siis saab avaldada iga ainepunkti kineetilise energia kui

$$W_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}$$

Kogu keha kineetiline energia aga on

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

$J_i = m_i r_i^2$  on ainepunkti inertsimoment ning  $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  on keha inertsimoment. Tähistame  $J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ , siis

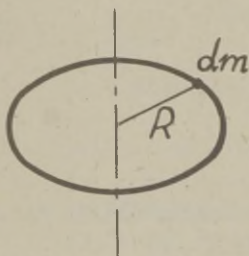
$$W_K = \frac{J\omega^2}{2} \quad (9.6)$$

Keha inertsimoment  $J$  on suurus, mis iseloomustab pöörleva keha massi ning selle paigutust pöörlemistelje suhtes. Inertsimomendi  $SJ$ -ühikuks on  $kg\,m^2$ ,  $CGS$ -süsteemis  $g\,cm^2$  jne.

Keha inertsimomendi arvutamine üldjuhul, kui keha kuju pole geomeetriliselt küllalt korrapärane, on väga keerukas ülesanne. Geomeetriliselt korrapäraste, eriti ümmarguste homogeensete kehade korral aga on see täiesti võimalik ning isegi lihtne ülesanne.

#### 9.4. Kehade inertsimomente

##### 1) Peene rõnga inertsimoment selle telje suhtes (joon.



9:5). Rõnga elementi pikkusega  $dl$  võib vaadelda kui ainepunkti massiga

$$dm = \mu dl,$$

kus  $\mu$  on rõnga joontihedus.

Selle elemendi inertsimoment

$$dJ = dm R^2 = \mu R^2 dl$$

Joon. 9:5.

Kogu rõnga inertsimoment

$$J = \int_0^{2\pi R} \mu R^2 dl = \mu R^2 2\pi R$$

Et  $2\pi R\mu = m$ , siis

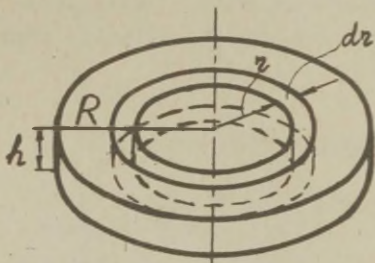
$$J = m R^2 \quad (9.7)$$



Analoogilised arutlused näitavad, et ka õhukeste seintega silindri inertsimoment silindri telje suhtes  $J = m R^2$ , kus  $m$  on silindri mass.

2) Ketta (silindri) inertsimoment tema telje suhtes.

Olgu ketta raadius  $R$ , tema paksus  $h$  ning materjali tihedus  $\rho$  (materjal homogeenne). Vaatleme elementaarsilindrit raadiusega  $r$  ning seinapaksusega  $dr$  (joon 9:6).

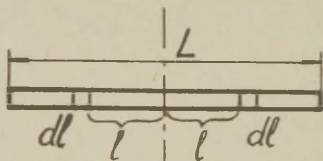


Joon. 9:6.

Et  $\pi R^2 h \rho = m$  on ketta mass, siis

$$J = \frac{1}{2} m R^2 \quad (9.8)$$

3) Peene varda inertsimoment telje suhtes. mis on risti vardaga ning läbib selle keskpunkti (joon. 9:7).



Joon. 9:7.

Varda lõiku  $dl$  võib vaadelda kui ainepunkti. Selle elemendi inertsimoment

$$dJ = \mu dl \cdot l^2,$$

kus  $\mu$  on varda joon-

tihedus. Kogu varda inertsimoment

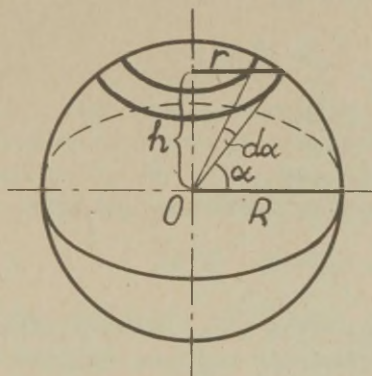
$$J = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} dJ = 2 \mu \int_0^{\frac{L}{2}} l^2 dl = \mu \frac{L^3}{12}$$

Et  $\mu L = m$  on varda mass, siis

$$J = \frac{1}{12} m L^2 \quad (9.9)$$

4) Kera inertsimoment tema tsentrit läbiva telje suhtes.

Olgu kera (joon. 9:8) raadius  $R$  ning materjali tihedus  $\rho$  (materjal homogeenne). Vaatleme selles kera



Joon. 9:8.

risti valitud teljega asetsevat elementaarkihti, mille raadius on  $z$ , kaugus tsentrist  $h$  ning paksus  $dh$ . Nii-suguse kihi inertsimoment

$$dJ = \frac{1}{2} \pi z^2 dh \rho \cdot z^2$$

Asendanud

$$z = R \cos \alpha$$

ning

$$h = R \sin \alpha \Rightarrow dh = R \cos \alpha d\alpha,$$

saame

$$dJ = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 \cos^3 \alpha d\alpha$$

Kera inertsimoment

$$J = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dJ = \pi \rho R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \alpha d\alpha$$

Pärast integreerimist saame

$$J = \frac{8}{15} \pi R^5 \rho$$

Et kera mass  $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ , siis

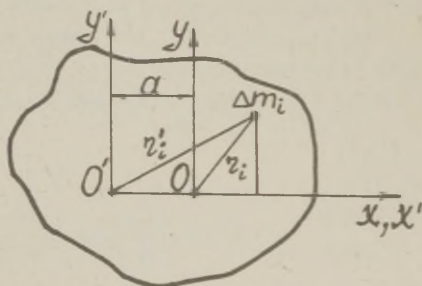
$$J = \frac{2}{5} m R^2 \quad (9.10)$$

5) Huygensi<sup>§</sup> teoreem võimaldab arvutada keha inertsimomendi  $J'$  suvaliselt valitud telje suhtes, kui on teada selle keha inertsimoment  $J$  telje suhtes, mis on esimesega paralleelne ning läbib keha massikeset

$$J' = J + m a^2,$$

kus  $m$  on keha mass,  $a$  - telgedevaheline kaugus.

Teoreemi tõestamiseks vaatleme suvalise kujuga keha, mille massikeset asub punktis  $O$  (joon. 9:9). Kaks koordinaat



Joon. 9:9.

§ Cristiaan Huygens (1629-1695), Madalmaade füüsik ja astronoom.

tide süsteemi on valitud nii, et teljed  $X$  ja  $X'$  ühtivad, teljed  $Z$  ja  $Z'$  aga on risti joonise tasapinnaga, milles asuvad teljed  $X$  ja  $X'$  ning  $Y$  ja  $Y'$ . Arvutame keha inertsimomendid  $J$  ja  $J'$  telgede  $Z$  ja  $Z'$  suhtes.

Ainepunkti  $\Delta m_i$  koordinaadid on

$$x_i' = x_i + a,$$

$$y_i' = y_i$$

Selle punkti kauguste ruudud telgedest  $Z$  ja  $Z'$  on

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2,$$

$$r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (x_i + a)^2 + y_i^2$$

Keha inertsimoment

$$J = \sum r_i^2 \Delta m_i = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i$$

ning

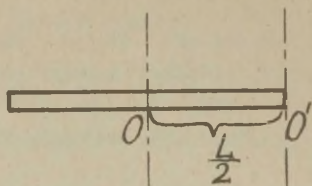
$$\begin{aligned} J' &= \sum r_i'^2 \Delta m_i = \sum [(x_i + a)^2 + y_i^2] \Delta m_i = \\ &= \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + a^2 \sum \Delta m_i + 2a \sum x_i \Delta m_i \end{aligned}$$

Kuna telg  $Z$  läbib keha masskeset, siis saadud summa viimane liige on null ning

$$J' = J + ma^2 \quad (9.11)$$

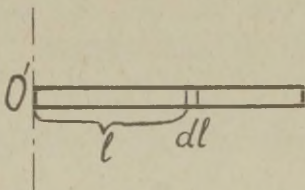
Näitena arvutame peene varda inertsimomendi telje  $O'$  suhtes, mis on risti vardaga ning läbib varda otspunkti (joon. 9:10).





Joon. 9:10.

Sama tulemuse saame, arvutades  $J'$  otse (joon. 9:11).



Joon. 9:11.

$$J = \frac{1}{12} m L^2$$

$$J' = J + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} m L^2}}$$

Varda elemendi  $dl$  inertsimoment

$$dJ = \mu dl \cdot l^2$$

( $\mu$  - varda joontihedus). Varda inertsimoment

$$J = \int_0^L \mu l^2 dl = \mu \frac{L^3}{3} = \underline{\underline{\frac{m L^2}{3}}},$$

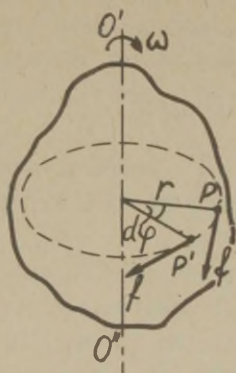
kus  $m = \mu L$  on varda mass.

### 9.5. Pöörlemise dünaamika põhivõrrand

Vaatleme kindlat keha, mille inertsimoment telje  $O'O''$  suhtes on  $J$  ning mis pöörleb selle telje ümber nurkkiirusega  $\omega$  (joon. 9:12). Kui rakendada sellele kehale punktis  $P$  jõud  $f$ , mille suund ühtib puutujaga punkti  $P$  trajektoorige (ringjoon raadiusega  $r$ ), siis ajavahemiku  $dt$  kestel, kui keha on pöördunud nurga  $d\varphi$  võrra, on selle jõu töö

$$dA = f r d\varphi$$

Korrutis  $f r$  on antud jõu moment (aksiaalvektor  $M =$



Joon. 9:12.

$= fr$ , mille suund määratakse parema käe kruvi reegli järgi). Seega

$$dA = M d\varphi$$

Selle töö arvel suureneb keha kineetiline energia  $dW$  võrra:

$$dA = dW$$

ehk

$$M d\varphi = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right),$$

$$M d\varphi = J\omega d\omega$$

Jaganud viimase võrrandi mõlemad pooli  $dt$ -ga, saame

$$M \frac{d\varphi}{dt} = J\omega \frac{d\omega}{dt}$$

Kuna  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  ning  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$  (nurkkiirendus), siis

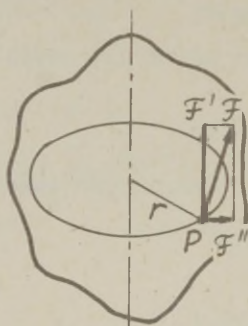
$$M = J\varepsilon \quad (9.12)$$

Saadud tulemus ongi pöörlemise dünaamika põhivõrrand.  
Et  $\vec{M}$  ja  $\vec{E}$  on aksiaalsed vektorid, siis

$$\vec{M} = J \vec{E} \quad (9.12')$$

Seega nurkkiirenduse  $\vec{E}$  suund on määratud mõjuva jõu  $\vec{F}$  pöördemomendi  $\vec{M}$  suunaga ning kummagi vektori moodulid on võrdelised suurused.

**Märkus.** Dünaamika põhivõrrandi tuletamisel on võetud arvesse jõud, mis asub pöörlemisteljega risti olevas tasapinnas ning on puutujaks rakenduspunkti trajektoorige. Kehale mingis punktis  $P$  rakendatud jõud  $\vec{F}$  võib üldjuhul olla suvaliselt suunatud (joon. 9:13). Kuid

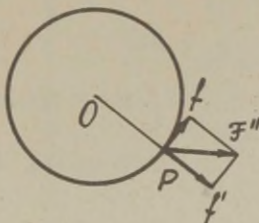


niisuguse jõu võib alati lahutada kaheks komponendiks, millest üks  $\vec{F}'$  on paralleelne pöörlemisteljega, teine  $\vec{F}''$  aga asub tasapinnas, mis läbib jõu rakenduspunkti ning on risti pöörlemisteljega. On kerge mõista,

Joon. 9:13.

et pöörlemisteljega paralleelne jõud  $\vec{F}'$  keha pöörlemisele mõju ei avalda (ta võiks kutsuda esile vaid telje paindumise, kuid kindla keha puhul niisugune efekt arvesse ei tule). Jõu  $\vec{F}''$  võib omakorda lahutada kaheks komponendiks:  $\vec{F}$  - puutuja punkti  $P$  trajektoorige ning  $\vec{F}'$  suunatud mööda raadiust (joon. 9:14). Viimane samuti kui pöörlemisteljega paralleelne jõud ei mõjuta keha pöörlemist. Nii taandub iga suvalise jõu mõju pöörlemisele selle jõu niisuguse komponendi mõjule, mis on tema rakenduspunkti poolt keha pöörlemisel joo-

nestatava ringjoone puutujaks.



Joon. 9:14.

### 9.6. Liikumishulga momendi (pöörlemishulga) jäävuse seadus

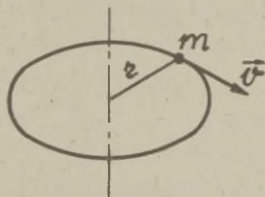
Mööda ringjoont liikuva ainepunkti liikumishulga moment

$$L = mvr,$$

kus  $m$  on ainepunkti mass,

$v$  - tema liikumise joonkiirus ning

$r$  - ringjoone raadius (joon. 9:15).



Joon. 9:15.

Asendanud joonkiiruse  $v$  nurkkiiruse  $\omega$  kaudu  $v = \omega r$  ning võttes arvesse, et  $J = mr^2$ , saame



$$L = J\omega$$

Et  $\vec{\omega}$  on aksiaalvektor, siis ka  $\vec{L}$  on samasuunaline vektor

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \quad (9.13')$$

Analoogiliselt omistatakse pöörlemishulk  $\vec{L} = J\vec{\omega}$  ka pöörlevale kindlale kehale.

Pöörlemishulga  $L$  SI-ühikuks on  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ , CGS-süsteemis  $\text{g cm}^2 \text{s}^{-1}$ .

Kehale mõjuva pöördemomendi  $\vec{M}$  ja selle mõjumise aja  $dt$  korrutist  $\vec{M}dt$  nimetatakse pöördemimpulssiks.

Varem tuletatud pöörlemise dünaamika põhivõrrandit saab formuleerida teisiti, kasutades pöörlemishulga ja pöördemimpulsi mõisteid. Asendame valemis (9.12)

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

saame

$$\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

ehk

$$\vec{M}dt = Jd\vec{\omega}$$

Kindla keha korral  $J = \text{const}$  ning

$$\vec{M}dt = d(J\vec{\omega}) \quad (9.14)$$

Keha pöörlemishulga juurdekasv on võrdne temale rakendatud pöördemimpulsiga.

Pöörlemise dünaamika põhivõrrandist (9.14)

$$\vec{M}dt = d(J\vec{\omega})$$

järgneb, et kui  $M=0$ , s.t. kui on tegemist isoleeritud kehaga, siis

$$\vec{J}\omega = \text{const},$$

s.o. isoleeritud keha pöörlemishulk on jääv suurus.



Joon. 9:16.

jutavaid jõudusid (süsteem on isoleeritud), siis tema pöörlemishulk on jääv suurus:

$$\sum \vec{J}_i \vec{\omega}_i = \text{const}, \quad (9.16)$$

s.o. isoleeritud süsteemis saavad esineda vaid vastastikku kompenseeruvad pöörlemishulga muutused.

Kui vaadelda deformeeritavat keha, mille inertsimomenti pöörlemistelje suhtes on võimalik muuta, siis selle keha nurkkiirus  $\omega$  muutub pöördvõrdeliselt inertsimomendiga  $J$ .

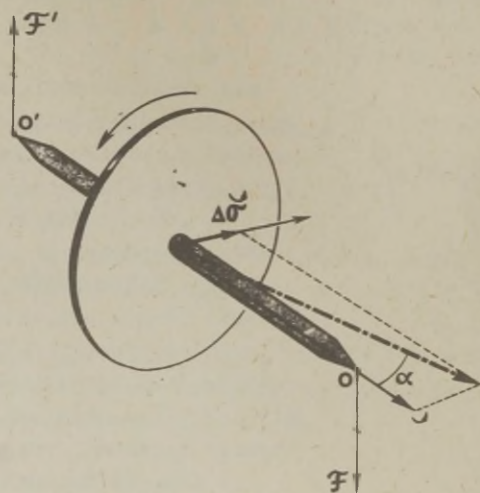
Näide. Inimene pöörleval (Žukovski) pingil, massiivsed vihid ( $m$ ) käes (joon. 9.16). Vihtide eemaldamisel teljest või lähendamisel sellele süsteemi nurkkiirus vastavalt väheneb või suureneb.

Kui süsteem koosneb mitmest kehast, kusjuures igal kehal on oma pöörlemistelg ja nurkkiirus, siis süsteemi pöörlemishulk

$$\vec{L} = \sum \vec{J}_i \vec{\omega}_i \quad (9.15)$$

Kui sellele süsteemile ei raken- data väljastpoolt pöörlemist mõ-

## 9.7. Güroskoopiline efekt



Joon. 9.17.

Vaatleme hooratast, mille inertsimoment telje  $OO'$  suhtes on  $\mathcal{I}$  ning mis pöörleb ümber selle telje nurkkiirusega  $\vec{\omega}$  (joon. 9.17). Niisugusel juhul on hooratta pöörlemishulk telje  $O'O$  suunaline vektor

$$\vec{L} = \mathcal{I}\vec{\omega}$$

Rakendame selle hooratta teljele otspunktides  $O$  ja  $O'$  võrdsed ja paralleelsed, kuid vastassuunalised jõud  $F$  ja  $F'$ , mis moodustavad jõupaari. Seega on hoorattale rakendatud pöördemoment  $\vec{M}$ , ning kui see on mõjunud ajavahemiku  $\Delta t$  kestel, on hooratas saanud pöörlemishulga juurdekasvu

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t,$$

mis lisandub pöörlemishulgale  $\vec{L}$ . Ajavahemiku  $\Delta t$  lõpuks on hooratta pöörlemishulk

$$\vec{L}' = \vec{L} + \Delta \vec{L}$$

Sellest järgneb, et hooratta telg võtab uue asendi, olles pöördunud nurga  $\alpha$  võrra tasapinnas, mis on risti jõudude  $\vec{F}$  ja  $\vec{F}'$  tasapinnaga. On arusaadav, et nurk  $\alpha$  on seda väiksem, mida väiksem on  $\Delta L$  võrreldes  $L$  - ga, mis tegelikult leiab aset, kui hooratta inertsimoment ja pöörlemise nurkkiirus (seega pöörlemishulk) on küllalt suured. Niisuguses olukorras on vaja tugevat välismõju  $\vec{M}$ , et muuta hooratta pöörlemistasapinda.

Siit tuleneb võimalus rakendada selliseid suure inertsimomendiga kiiresti pöörlevaid kehi (güroskoope) laevade, lennukite või raketide liikumissuuna säilitamiseks.

#### Ülesanne 9-1.

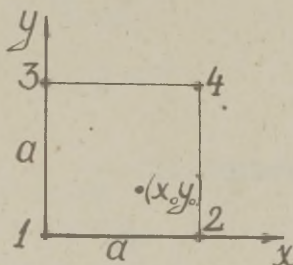
Neli kuulikest ( $m_1 = 300g$ ;  $m_2 = 400g$ ;  $m_3 = 200g$ ;  $m_4 = 100g$ ) asetsevad ruudu tippudes (joon. 9:18), mille külje pikkus  $a = 10\text{ cm}$ . Määrata niisuguse süsteemi masskeskme koordinaadid  $x_0, y_0$ .

#### Lahendus.

Masskeskme koordinaadid  
(9.1):

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$

$$y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$



Joon. 9:18.

$$x_0 = \frac{m_2 a + m_4 a}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \underline{\underline{5\text{ cm}}},$$

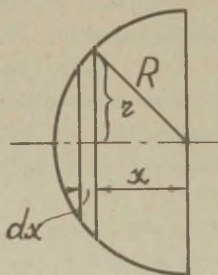
$$y_0 = \frac{m_3 a + m_4 a}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \underline{\underline{3\text{ cm}}}$$



### Ülesanne 9-2.

Määrata homogeense poolketta ( $R$ ) massikeskme kaugus  $x_0$  teda piiravast diameetrist.

Lahendus (joon. 9:19).



Vaatleme poolketast koosnevana elementaarribadest laiussega  $dx$ , millede massi asemel võime massikeskme arvutamisel arvestada nende pindala:

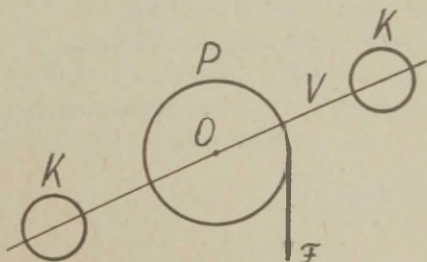
$$dS = 2\sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Valemite (9.1') alusel massikeskme koordinaat

Joon. 9:19.

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\int_0^R x dS}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{\int_0^R 2\sqrt{R^2 - x^2} x dx}{\frac{\pi R^2}{2}} = \\ &= -\frac{2}{\pi R^2} (R^2 - x^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \bigg|_0^R = \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi}}} \end{aligned}$$

### Ülesanne 9-3.



Joon. 9:20.

Joonisel 9:20 kujutatud süsteem koosneb plokirattast  $P$ , mida võib pidada kettaks massiga  $m$  ning läbimõõduga  $d$ , vardast  $V$  pikkusega  $L$ , massiga  $3m$ , kahest ühesugusest kerakujulisest kuu- list massiga  $5m$ ,

raadiusega  $R$ , millede tsentrid asuvad vardal kaugusel  $D$  joonisega risti olevast pöörlemisteljest  $O$ , mis läbib varda keskpunkti.

Flokirattale mähitud nööri otsast tõmmatakse jõuga  $F$ , mis on võrdne kogu süsteemi kaaluga.

Määrata nurkkiirendus, millega süsteem hakkab hõõrdumisvabalt pöörlema.

### Lahendus.

Nurkkiirenduse saame määrata pöörlemise dünaamika põhiseadusest (9.12)

$$M = J\varepsilon$$

Pöördemoment

$$M = F \cdot \frac{d}{2} = 14 \text{ mg} \cdot \frac{d}{2} = 7 \text{ mgd}$$

Inertsimoment

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} m \frac{d^2}{4} + \frac{1}{12} 3mL^2 + 2 \left( \frac{2}{5} 5mR^2 + 5mD^2 \right) = \\ &= \frac{m}{8} (d^2 + 2L^2 + 32R^2 + 80D^2) \end{aligned}$$

ning nurkkiirendus

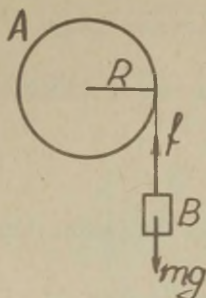
$$\varepsilon = \frac{56d}{d^2 + 2L^2 + 32R^2 + 80D^2}$$

### Ülesanne 9-4.

Horisontaalsel teljel  $O$  vabalt pöörlevale silindrile  $A$  ( $M=10 \text{ kg}$ ,  $R=5 \text{ cm}$ ) on mähitud nöör, mille otsas ripub viht  $B$  ( $m=1 \text{ kg}$ ) (joon. 9:21). Lugesdes nööri massi tähtsusetult väikeseks, määrata

- 1) vihi  $B$  liikumise seadus,
- 2) nööri pingutav jõud  $f$ ,
- 3) silindri pöörlemise seadus  $\varphi(t)$ ,

- 4) silindri nurkkiirus  $2s$  pärast liikumise algust,  
 5) silindri pinnapunktide tangent-siaal- ja normaalkiirendus samal ajamomendil.



Joon. 9:21.

Lahendus.

Dünaamika põhiseadus silindri puhul (9.12)

$$fR = J\varepsilon,$$

kus silindri inertsimoment (9.8)

$$J = \frac{MR^2}{2}$$

ning  $f$  on nöörü tõmme ja  $\varepsilon$  silindri pöörlemise nurkkiirendus.

Vihi laskumise kiirendus

$$a = R\varepsilon,$$

seega

$$f = \frac{Ma}{2}$$

Newtoni II seadus vihi B puhul on

$$mg - f = ma$$

Lahendanud koos kaks viimast võrrandit, saame

$$a = \frac{2mg}{M+2m} = \frac{2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}}{(10+2) \text{ kg}} = 1,64 \text{ ms}^{-2}$$

Järelikult vihi B liikumise seadus on

$$s = \frac{at^2}{2} \quad \text{ehk} \quad \underline{\underline{s = 0,82 t^2}}$$

(aeg mõõdetud sekundites, pikkus meetrites).

Nööri tõmme

$$f = \frac{ma}{2} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 1,64 \text{ m s}^{-2}}{2} = \underline{\underline{8,2 \text{ N}}}$$

Silindri nurkkiirendus

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{1,64 \text{ m s}^{-2}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 32,8 \text{ s}^{-2}$$

Silt silindri pöörlemise seadus

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \text{ehk} \quad \underline{\underline{\varphi = 16,4 \text{ t}^2}}$$

(aeg avaldatud sekundites, nurk radiaanides).

Ajasmomendil  $t = 2 \text{ s}$  silindri nurkkiirus

$$\omega = \varepsilon t = 32,8 \text{ s}^{-2} \cdot 2 \text{ s} = \underline{\underline{65,6 \text{ s}^{-1}}}$$

Silindri pinna punktide kiirenduse komponendid:

$$a_t = a = \underline{\underline{1,64 \text{ m s}^{-2}}},$$

$$a_n = \omega^2 R = 65,6 \text{ s}^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \underline{\underline{215 \text{ m s}^{-2}}}$$

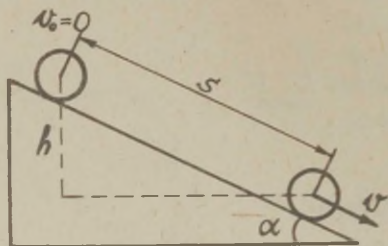
### Ülesanne 9-5.

Homogeenne kera ( $m, R$ ) veereb libisemata oma raskusjõu mõjul mööda kaldpinda, mis moodustab horisontaalpinna-ga nurga  $\alpha$ .

- Kui suure kiiruse  $v$  saavutab kera keskpunkt, kui ta on läbinud tee pikkusega  $S$  ja hakanud liikuma paigalseisust?
- Võrrelda saadud tulemust kiirusega, mille saavutaks mingi keha, libisedes hõõrdumisvabalt mööda sama kaldpinda samas ulatuses.



Lahendus (joon. 9:22).



Joon. 9:22.

Kera veeremisel mööda kaldpinda saab raskusjõu poelt tehtud töö veereva kera kinetilliseks energiaks:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

Et  $h = s \sin \alpha$ , kera inertsimoment (9.10)

$$J = \frac{2}{5} mR^2 \text{ ning } \omega = \frac{v}{R},$$

siis

$$mgs \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mR^2 v^2}{5 \cdot 2 \cdot R^2}$$

ehk

$$gs \sin \alpha = \frac{7}{10} v^2,$$

kust

$$v = \sqrt{\frac{10gs \sin \alpha}{7}}$$

Mingi keha hõõrdumisvabal libisemisel samades tingimustes sasse kirjutada energia jäävuse seaduse võrrandina

$$mgs \sin \alpha = \frac{mv^{*2}}{2}$$

ning siit

$$v^* = \sqrt{2gs \sin \alpha}$$

Võrdleme kahte tulemust nende suhte kaudu:

$$\frac{v}{v^*} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

Seega

$$\underline{\underline{v = 0,84 \text{ m}^*}}$$

### Ülesanne 9-6.

Pöörleval (Žukovski) pingil seisab inimene ning hoiab väljasirutatud kätes kahte vihti kumbki massiga  $m = 2 \text{ kg}$ . Vihtide vahemaa on seejuures  $\ell_1 = 1,5 \text{ m}$  ning pink pöörleb sagedusega  $\nu_1 = 1 \text{ s}^{-1}$ . Kui inimene laseb käed alla ning vihtide vahemaa väheneb  $\ell_2 = 80 \text{ cm}$ -ni, hakkab pink pöörlema sagedusega  $\nu_2 = 1,5 \text{ s}^{-1}$ .

Määrata inimese poolt tehtud töö, pidades tema inertsimomenti pöörlemistelje suhtes jäävaks.

### Lahendus.

Olgu  $\mathcal{I}_0$  pingi ja inimese inertsimoment pöörlemistelje suhtes. Kummagi vihi inertsimoment sama telje suhtes on siis

$$\text{alguses} \quad \mathcal{I}_1 = \frac{m \ell_1^2}{4}$$

ning

$$\text{lõpus} \quad \mathcal{I}_2 = \frac{m \ell_2^2}{4}$$

Lugedes vaadeldavat süsteemi isoleerituks, võime kirjutada selle pöörlemishulga jäävuse seaduse (9.16):

$$\left(\mathcal{I}_0 + 2 \frac{m \ell_1^2}{4}\right) \nu_1 = \left(\mathcal{I}_0 + 2 \frac{m \ell_2^2}{4}\right) \nu_2,$$

kust

$$\mathcal{I}_0 = \frac{m(\ell_1^2 \nu_1 - \ell_2^2 \nu_2)}{2(\nu_2 - \nu_1)}$$

Vihtide asendi muutmiseks tehtud töö  $A$  on võrdne süsteemi kineetilise energia juurdekasvuga:

$$A = J_0 \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} + 2 \frac{m l_2^2}{4} \frac{\omega_2^2}{2} - 2 \frac{m l_1^2}{4} \frac{\omega_1^2}{2}$$

Pärast  $J_0$  avaldise asendamist ning algebraliste tei-  
senduste teostamist saame

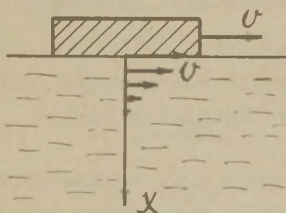
$$A = m\pi^2 (\ell_1^2 - \ell_2^2) v_1 v_2 = \underline{\underline{48 \tilde{f}}}$$

Märkus. Osa arvutatud tööhulgast teevad vihtidele mõjuvad  
raskusjõud, kui vihid lõppasendis on madalamal, kui olid  
algasendis.

## 10. VEDELIKE MEHAANIKA

### 10.1. Sisehõõrdumine vedelikes

Vedeliku üheks põhiomaduseks on see, et tema osakeste ümberpaigutamiseks piisab väga väikestest jõududest. Siiski, kui kaks vedelikukihti liiguvad teineteise suhtes lõpliku kiirusega, tekivad nende lahutuspinnaal tangentsiaalsed jõud, mis takistavad kummagi kihi liikumist. Neid jõudusid nimetatakse sisehõõrde jõududeks, nähtust aga sisehõõrdumiseks ehk viskoossuseks.



Joon. 10:1.

Kujutleme, et vedeliku pinnale on asetatud tahke plaat, mis pannakse liikuma kiirusega  $v$  mööda seda pinda (joon. 10:1). Need vedelikuosakesed, mis on otseses kokkupuutes plaadiga, kleepuvad selle külge ning liiguvad kiirusega  $v$ . Alumised vedeli-

kukihid liiguvad väiksemate kiirustega, kusjuures kiirus väheneb sügavuse suurenemisel telje  $X$  suunas, kuni mingil sügavusel võime vedeliku lugeda paigalseisvaks. Plaadi liikumapanemiseks rakendatav jõud  $F$  on vajalik vedelikukihtide-vaheliste hõõrdejõudude (sisehõõrde) ületamiseks.

Sisehõõrdejõud vedelikus on võrdeline kiiruse gradiendiga



$\frac{d\sigma}{dx}$  ja kihi pindalaga  $S$ :

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S \quad (10.1)$$

$\eta$  on antud vedeliku sisehõõrdetegur;  
märk "-" kompenseerib kiiruse gradiendi negatiivsuse.

Sisehõõrdetegur  $\eta$  näitab jõudu, mis tekib vedelikukihi pindalaühiku kohta tingimusel, kui see kiht liigub temast ühiku kaugusel oleva teise kihi suhtes ühikulise kiirusega. Teisiti väljendatult: sisehõõrdetegur  $\eta$  on arvuliselt võrdne jõuga, mis tekib vedelikukihi pindalaühiku kohta tingimusel, et kiiruse gradient selle kihi pinnal on üks ühik.

Sisehõõrdeteguri  $S\eta$ -ühikuks on  $kg\ m^{-1}s^{-1}$ .

Sisehõõrdumine vedelikes on tingitud molekulidevahelistest tõmbejõududest, seetõttu temperatuuri tõustes sisehõõrded jõud vedelikes vähenevad.

## 10.2. Ideaalse vedeliku statsionaarne voolamine

Vedelike kokkusurutavus on väga väike. Näiteks vee puhul lisarõhu 1000 at rakendamisel väheneb vee ruumala ainult 5% võrra. Seepärast võib esimeses lähenduses lugeda neid kokkusurumatuteks.

Gaaside kokkusurutavus on küll suur, kuid voolamisel võib ka neid vaadelda kui kokkusurumatuid vedelikke. Niisuguse võimaluse põhjus seisneb selles, et vähimadki rõhkude erinevused, mis võivad tekkida kahes naaberpiirkonnas ning kutsuda esile väikesi tiheduse erinevusi, on võimelised tekitama kiiret liikumist gaasis, mille tulemusena rõhk väga kiiresti ühtlustub. Eksperiment näitab, et kiirusteni kuni  $100\ m\ s^{-1}$  võib gaasi voolamist arvutada kui kokkusurumatu vedeliku voolamist.

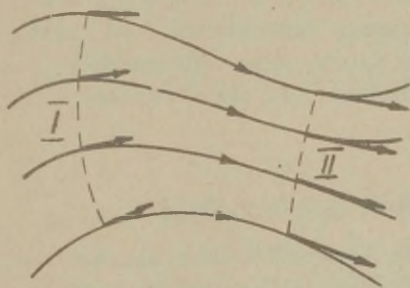
Teine asjaolu, mida esimeses lähenduses ei tarvitse arvesse võtta, on sisehõõrdumine vedelikus.

Nii on loodud vedeliku lihtsustatud mudel - ideaalne vedelik, s. o. kokkusurumatu vedelik, mille voolamisel ei esine sisehõõrdejõudusid. Niisuguse mudeli arvutamine osutub märksa lihtsamaks ning saadud tulemused langevad sageli küllalt hästi kokku eksperimendi andmetega.

Vedelikku võiks vaadelda kui ainepunktide kogu ning kirjeldada tema liikumist, määraes nende ainepunktide kiirusi ja kiirendusi. Kuid hüdrodünaamikas talitatakse teisiti: võetakse vaatluse alla ruum, milles vedelik voolab, ning omistatakse selle ruumi punktidele igal ajamomendil vastavad kiirused. Nii määratakse vooluvälja.

Vooluvälja graafiliseks kirjeldamiseks kasutatakse voolujooni. Voolujoon on kõver, mille puutuja suund selle igas punktis ühtib kiiruse suunaga selles punktis. Voolujoonte tihedus aga peab olema kas võrdne või võrdeline kiiruse väärtusega voolu antud piirkonnas. Voolujooned ei lõiku ega katke: nad algavad seal, kust vedelik hakkab voolama, ning lõpevad seal, kus vedelik lakkab voolamast (jääb seisma).

Nii on joonise 10:2 järgi piirkonnas II voolu kiirus suurem kui piirkonnas I.



Joon. 10:2.

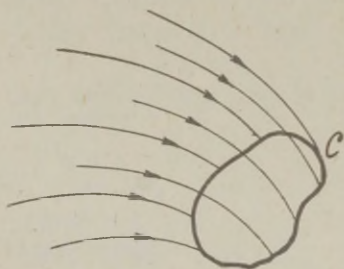
Kiiruse jaotus vooluväljas võib muutuda ajas. Siis muu-

tub ka voolu graafiline pilt: voolujoonte kuju ja nende paigutus.

Niisugusel juhul ei ole voolujooned osakeste trajektoriideks.

Kui kiiruse jaotus vooluväljas ei muutu ajaga, nimetatakse voolu *statsionaarseks*. Statsionaarse voolu korral ühtivad osakeste trajektoidid voolujoontega.

Kui kujutada statsionaarses voolus üht kinnist kontuuri *C* (joon. 10:3) ning läbi selle kontuuri iga punkti minevat voolujoont, saame nn. *voolutoru*. Voolutoru



Joon. 10:3.

"seinad" on vedelikuosakestele läbipääsmatud. Eristatakse kahte liiki voolamist:

1) *laminaarne* ehk *kihiline* voolamine: vedelikukihid, libisedes üksteise suhtes, ei segune. Väikeste kiiruste korral

on voolamine sageli laminaarne;

2) kui vedelik voolab suure kiirusega, toimub vedelikukihtide segunemine, tekivad pöörised. Niisugust pööriselist voolamist nimetatakse *turbulentseks*.

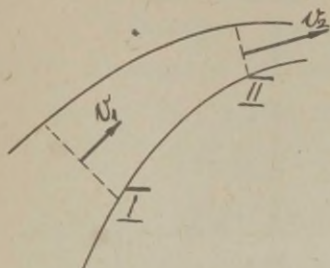
Turbulentsel voolamisel kirjeldamine on igati keeruline ülesanne, seepärast piirdatakse üldfüüsika kursuse hüdromehaanika osas laminaarse voolamise üksikasjalikuma kirjeldamisega.

### 10.3. Pidevuse võrrand

Vaatleme ideaalse vedeliku statsionaarset voolamist.

Olgu mingi voolutoru kahe suvaliselt valitud ristlõike  $I$  ja  $II$  (joon. 10:4) pindalad  $S_1$  ja  $S_2$ , voolukiirused nendes  $v_1$  ja  $v_2$  ning vedeliku tihedus  $\rho$ . Pideva voolu korral peab kumbagi ristlõiget mingis ajavahemikus  $\Delta t$  läbima sama hulk vedelikku:





$$\Delta m_1 = S_1 v_1 \Delta t \rho,$$

$$\Delta m_2 = S_2 v_2 \Delta t \rho$$

Et  $\Delta m_1 = \Delta m_2$ , siis

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, (10.2)$$

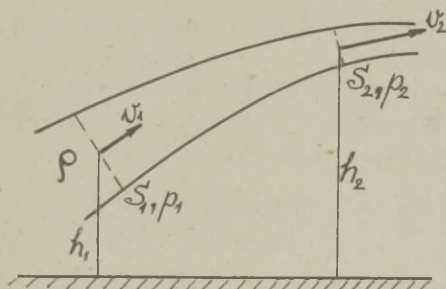
Joon. 10:4.

s.o. ideaalse vedeliku pideva voolu korral on

voolu kiirus pöördvõrdeline voolutoru ristlõike pindalaga.

Võrrandit (10.2) nimetatakse p i d e v u s e v õ r r a n d i k s.

#### 10.4. Bernoulli võrrand



Joon. 10:5.

Vaatleme ideaalse vedeliku voolus voolutoru, mille kaks ristlõiget  $I$  ja  $II$  pindalaga  $S_1$  ja  $S_2$  asuvad kõrgustel  $h_1$  ja  $h_2$  mingist horisontaalpinnast (joon.10:5). Vedelik voolab läbi nende ristlõigete kiirusega  $v_1$  ja  $v_2$  ning staatiline rõhk lõigetes on  $p_1$  ja  $p_2$ .

Pideva voolu tingimustes läbib ajavahemikus  $\Delta t$  kumbagi



lõiget sama hulk vedelikku, mille ruumala

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

ning mass

$$\Delta m = S_1 v_1 \Delta t \rho = S_2 v_2 \Delta t \rho,$$

kus  $\rho$  on vedeliku tihedus (kokkusurumatu vedeliku korral voolu kõikides piirkondades sama).

Ajavahemikus  $\Delta t$  kandub läbi ristlõike  $I$  konvektsiooniliselt  $\frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1$  energiat. Peale selle esineb siin veel energia kandumine rõhu tõttu, s.o. ristlõike  $I$  taga olev vedelik lükkab selle ees olevat vedelikusamast ning sooritab töö  $p_1 S_1 v_1 \Delta t$ . Seega koosneb läbi lõike  $I$  kandunud energia kolmest komponendist:

$$\frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t$$

Samasugustest komponentidest koosneb ka läbi ristlõike  $II$  kanduv energia.

Kuna voolutoru osas, mida piiravad ristlõiked  $I$  ja  $II$ , ei toimu energia kogunemist ega ka selle kulu (vedelikus sisesehõõrdumine puudub täielikult), siis peab kehtima võrdsus:

$$\frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

Jaganud võrrandi kõik liikmed ruumalaga  $\Delta V$ , saame

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \quad (10.3)$$

ehk

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} \quad (10.3')$$

Viimases võrrandis

$p$  on staatiline rõhk,

$\rho g h$  - vedeliku kaalust Maa raskusväljas tingitud (hüdrostaatiline) rõhk ning

$\frac{\rho v^2}{2}$  nimetatakse dünaamiliseks rõhuks.

Võrrandis (10.3') võib üksikuid liikmeid tõlgendada ka energia tihedustena voolus.

### Järeldusi Bernoulli võrrandist

1) Horisontaalse voolu korral võrrandis (10.3)  $h_1 = h_2$  ning võrrand võtab kuju

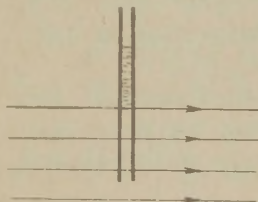
$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho = \text{const} \quad (10.4)$$

Nimetanud dünaamilise ja staatilise rõhu summa  $\frac{\rho v^2}{2} + \rho$  kogurõhuks  $P_k$ , võime väita, et ideaalse vedeliku pideva voolu korral kogurõhk  $P_k$  voolutoru ulatuses ei muutu. See seos teeb staatilise rõhu sõltuvaks vedeliku kiirusest: suurte kiiruste piirkonnas on staatiline rõhk väike, ja vastupidi.

Viimane väide võimaldab seletada mitmesuguste seadmete tööd (pulverisaator, veejoapump, gaasipõleti, aurumasina inžektor).

2) Rõhkude mõõtmisest voolavas vedelikus.

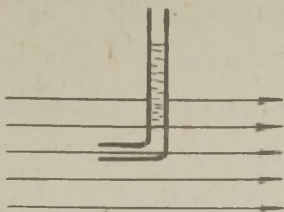
a) Staatilist rõhku mõõdetakse rõhusondiga, s.o. toruga, mis asetatakse vedelikku nii, et tema ava normaal oleks risti vooluga (joon. 10:6).



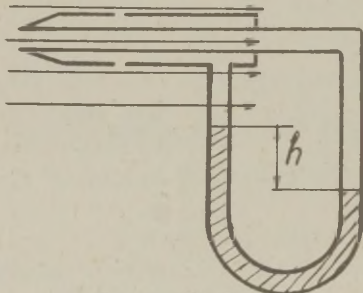
Joon. 10:6.

b) Kogurõhku (staatilise ja dünaamilise rõhu summat) mõõdab Pitot<sup>\*</sup> toru, s.o. toru, mille ava normaal on suunatud otse vastu voolu (joon. 10:7).

<sup>\*</sup> Henri Pitot (1695-1771), prantsuse insener ja füüsik.



Joon. 10:7.



Joon. 10:8.

c) Dünaamilist rõhku saab määrata kui kogurõhu ja staatilise rõhu vahet, kasutades selleks nn. Prandtl<sup>\*</sup> toru, mis on rõhusondi ja Pitot' toru kombinatsioon (joon.10:8). U-manomeetri üks haru ühendatakse Pitot' toruga, teine rõhusondiga.

Mõõtnud vedeliku nivoo- de vahe  $h$  U-manomeetris, arvutame dünaamilise rõhu

$$\frac{\rho v^2}{2} = \delta gh,$$

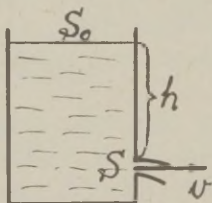
kus  $\delta$  on manomeetris oleva vedeliku tihedus.

Viimasest seosest saab arvutada ka voolukiiruse  $v$ .

3) Vaatleme näitena vedeliku väljavoolamist anumast läbi väikese ava.

Olgu anumast ristlõikega  $S_0$  vedelik tihedusega  $\rho$

ning anuma seinas väike ava pindalaga  $S$  sügavusel  $h$ , arvates vedeliku pinnast (joon. 10:9). Arvutame vedeliku väljavoolamise kiiruse läbi selle ava.



Joon. 10:9.

Kogu süsteemi võib vaadelda kui ühtset voolutoru, mille üheks ristlõikeks on

\* Ludwig Prandtl (1875-1953), saksa füüsik.



vedeliku pind anumask, mille pindala on  $S_0$  ning staatiline rõhk  $p_0$  - atmosfääri rõhk. Kui  $S_0 \gg S$ , siis voolukiirus selles lõikes on tähtsuselt väike ning võib selle lugeda nulliks. Teiseks ristlõikeks on ava pindalaga  $S$ , kus staatiline rõhk on samuti  $p_0$ .

Bernoulli võrrand võtab niisuguse voolutoru korral kuju

$$\rho gh + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0$$

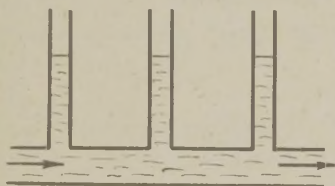
ning

$$v = \sqrt{2gh} \quad (10.5)$$

Saadud valemist, mis kannab Torricelli<sup>x</sup> nime, on näha, et vedeliku väljavoolamise kiirus ei sõltu vedeliku tihedusest, vaid ava asukohast vedeliku pinna suhtes anumas.

#### 10.5. Reaalsete vedelike voolamine torudes

Toru seinad ei avalda ideaalse vedeliku voolamisel mingit takistust, sest ideaalses vedelikus puuduvad sisehõõrdejõud. Nii näiteks peaks ideaalse vedeliku voolamisel ühtlase ristlõikega torus olema rõhud kõikides ristlõigetesk võrdsed (joonisel 10:10 oleks vedelik kõikides manomeetrilistes torudes sama kõrgel). Reaalsete vedelike puhul aga



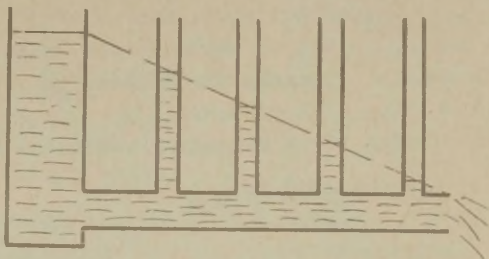
Joon. 10:10.

da ühtlase ristlõikega horisontaalset toru. Seda rõhu langust tasakaalustavad sisehõõrdejõud, mis on suunatud voolu vastu.

see nii ei ole. Reaalselt esinev pilt on kujutatud joonisel 10:11, kust nähtub, et võrdsete vahemaadega manomeetrilistes torudes asetuvad vedeliku nivood ühel sirgel. Järelikult langeb rõhk ühtlaselt möö-

<sup>x</sup> Evangelista Torricelli (1608-1647), itaalia füüsik, Galilei õpilane.





Joon. 10:11.

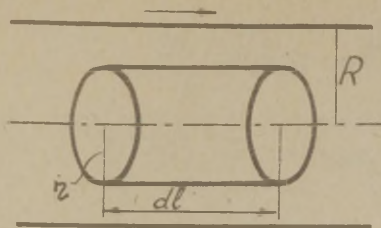
#### 10.6. Viskoosse vedeliku statsionaarne voolamine ühtlase ümmarguse ristlõikega horisontaalses torus

Kui vedelik voolab ühtlaselt piki horisontaalset toru, võib rõhku iga ristlõike pinna ulatuses lugeda samaks. Vastasel juhul esineks voolamine risti toruga. Osakesed, mis on otseses kokkupuutes toru seintega, on liikumatud, nende kiirus on null. Teised vedelikukihiid on liikumises anuma seinte suhtes. Kui jagada mõttes kogu torus voolav vedelik õhukesteks kontsentrilisteks silindrilisteks kihtideks, siis igale niisugusele kihile on omane üks kiirus, mille väärtus on seda suurem, mida kaugemal on tema toru seintest, s.o. mida lähemal on ta toru teljele. Kihtide vahel esinevad sisehõõrdejõud.

Uurime kiiruse jaotust torus.

Vaatleme toru (raadiusega  $R$ ), milles vedelik voolab vasakult paremale (joon. 10:12). Eraldanud vedelikust elementaarsilindri raadiusega  $r$  ning pikkusega  $dl$ , selgitame välja temale mõjuvad jõud. Liikumist tekitavaks jõuks on rõhumisjõudude vahe tema otspindadele:

$$\left[ P - \left( P + \frac{dp}{dr} \cdot dr \right) \right] \pi r^2 = - \frac{dp}{dr} \cdot dr \pi r^2$$



Joon. 10:12.

Liikumist takistavaks jõuks on tema külgpinnal mõjuv sisehõrdejõud

$$\eta 2\pi r dl \frac{dv}{dr},$$

kus  $\eta$  on vedeliku sisehõrdetegur ning  $\frac{dv}{dr}$  kiiruse gradient torus.

Kuna vedelik voolab ühtlaselt, peavad need kaks jõudu tasakaalustuma:

$$-\frac{dp}{dl} dl \pi r^2 - \eta 2\pi r dl \frac{dv}{dr} = 0$$

ehk

$$r \frac{dr}{dl} = -2\eta \frac{dv}{dr}$$

Rõhu gradient  $\frac{dp}{dl}$  ei sõltu raadiusest  $r$ , seepärast:

$$\frac{dp}{dl} \int_R^r r dr = 2\eta \int_0^r dv,$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{dp}{dl}\right) (R^2 - r^2) = 2\eta v,$$

$$v = \frac{1}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dl}\right) (R^2 - r^2)$$

Saadud valemist nähtub, et voolukiirus on maksimaalne toru teljel:

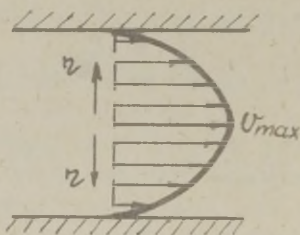
$$v_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \left( -\frac{dp}{dl} \right)$$

ning ta muutub raadiuse suunas paraboliselt (joon. 10:13).

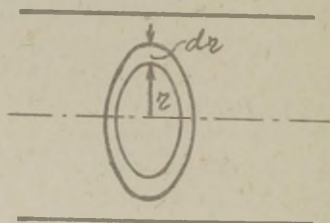
Teades kiiruse jaotust voolu ristlõikes, saab arvutada läbi ristlõike teatud ajavahemikus voolava vedeliku ruumala  $V$ . Kujutame voolu ristlõikes toru lõikega kontsentrisest rõngast raadiusega  $r$  ning "laiusega"  $dr$  (joon. 10:14). Läbi niisuguse rõnga voolab ajaühikus

$$dV = v \cdot 2\pi r dr$$

vedelikku.



Joon. 10:13.



Joon. 10:14.

Läbi kogu ristlõike ajaühikus voolanud vedeliku ruumala

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R dV = 2\pi \int_0^R v r dr = \\ &= \frac{2\pi}{4\eta} \left( -\frac{dp}{dl} \right) \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left( -\frac{dp}{dl} \right) \end{aligned}$$

Kui toru pikkus on  $l$  ning tema otspindades valitsevad rõhud  $p_1$  ja  $p_2$ , siis

$$\frac{dp}{dl} = \frac{p_2 - p_1}{l}$$

ja

$$V = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8 \eta l} \quad (10.6)$$

Saadud valemit tuntakse Poiseuille'i<sup>xx</sup> seaduse nime all.

On oluline märkida, et ülaltoodud arvutus on kehtiv küllalt väikese ristlõikega torude kohta. Kui toru läbimõõt on suur ning vedeliku viskoossus väike, piirdub sisehõõrdumise mõju voolule vaid suhteliselt õhukese toru seina lähedase piirkonnaga, seesmised vedelikukihid liiguvad praktiliselt ühesuguse kiirusega.

Poiseuille'i seadus võimaldab vedelike sisehõõrde teguri eksperimentaalset määramist.

#### 10.7. Bernoulli võrrandi rakendatavusest reaalsete vedelike voolamise arvutamiseks

Tuletatud ideaalse vedeliku jaoks, kehtib Bernoulli võrrand täielikult, kui vedelik on kokkusurumatu ning temas puudub täiesti sisehõõrdumine. Kuna ka reaalsed vedelikud on tõepoolest väga vähe kokkusurutavad, võib neid küllalt suure täpsusega lugeda kokkusurumatuteks. Seega, hinnates Bernoulli võrrandi väärtust reaalsete vedelike puhul, tuleb võtta arvesse peamiselt sisehõõrdumist. On lihtne mõista, et Bernoulli võrrand on seda täpsem, mida väiksem on energia kulu sisehõõrde ületamiseks, võrreldes voolava vedeliku kogu energiaga.

Vaadeldes vedeliku voolamist torus, iseloomustame seda keskmise kiirusega

$$v_k = \frac{V}{\pi R^2},$$

kus  $V$  on ajaühikus läbi toru ristlõike voolanud vedeliku ruumala,  $R$  - toru raadius.

---

<sup>xx</sup> Jees Poiseuille (1799-1869), prantsuse füüsik ja füsioloog. Vedeliku voolamise seaduse torus avastas 1844.a.



Poiseuille'i seaduse järgi (10.6)

$$V = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l},$$

kus  $p_1 - p_2$  on rõhkude vahe toru otstel,  $l$  - toru pikkus ning  $\eta$  - vedeliku sisehõõrdetegur.

Järelikult

$$v_K \pi R^2 = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{\pi R^4}{8\eta},$$

kust

$$(p_1 - p_2) \pi R^2 = 8\eta l \pi v_K$$

Viimase võrrandi vasak pool  $(p_1 - p_2) \pi R^2$  on rõhumisjõude vahe toru otstel ning statsionaarse voolu korral on see võrdne toru seinte poolt vedeliku voolamisele avaldata-va takistusjõuga  $F$ :

$$F = 8\pi \eta l v_K$$

Vedeliku liikumisel toru pikkuse  $l$  ulatuses on selle jõu töö

$$A = Fl = 8\pi \eta l^2 v_K$$

Nii oleme määranud sisehõõrdumise ületamiseks kuluva energia vedeliku voolamisel torus.

Arvutame nüüd võrdluseks torus pikkusega  $l = R$  voolava vedeliku kineetilise energia

$$W_K = \pi R^2 l \rho \frac{v_K^2}{2} = \pi l^3 \rho \frac{v_K^2}{2}$$

Et Bernoulli võrrand kehtiks küllalt täpselt, peab

$$W_K \gg A,$$

s.o.

$$\frac{\rho l v_K}{\eta} \gg 1$$

(10.7)

(Arvulised koefitsiendid on ära jäetud, kuna vörratus on väga tugev.)

Kuigi tingimus (10.7) on tuletatud ühe erandjuhu jaoks (vedeliku voolamisel torus), on see kehtiv ka vedeliku voolamisel üldse.

Avaldist  $R = \frac{\rho l v}{\eta}$  nimetatakse Reynolds'i<sup>\*</sup> arvuks, see on nimeta suurus, mis iseloomustab sisehõrde jõudude osatähtsust vedeliku voolamisel. Üldjuhul tuleb suurst  $\ell$  võtta kui vaadeldava vedeliku elemendi joonmõõdet.

Reynolds'i arvu olulisemaks komponendiks on  $\frac{\eta}{\rho} = \nu$ , mida nimetatakse kinemaatiliseks viskoossuseks (kinemaatilise viskoossuse  $\nu$  SI-ühikuks on  $m^2 s^{-1}$ ). Viimane suurus ( $\nu$ ) iseloomustab paremini kui sisehõrde tegur  $\eta$  sisehõrde mõju vedeliku voolamisele teistes vördsetes tingimustes.

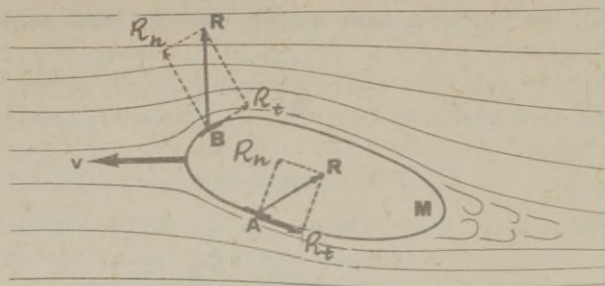
#### 10.8. Kehade liikumine reaalses vedelikus või gaasis

Selleks et hoida üht keha liikumises jääva kiirusega mingis reaalses keskkonnas (näiteks õhus või vees), peab sellele kehale pidevalt rakendama teatud jõudu. See osutab asjaolule, et keskkond avaldab takistavat jõudu keha liikumisele ning selle liikumapanemiseks rakendatud jõud tasakaalustabki takistusjõu. Analoogiline jõud tekib, kui paigalolevat keha ümbritseb voolav vedelik või gaas. Takistusjõu põhjustavad järgmised tegurid:

- 1) keskkonna sisehõrdumine,
- 2) alarõhk suurte kiiruste piirkonnas,
- 3) dünaamiline rõhk, kusjuures viimane on kõige olulise-  
ma tähtsusega.

Joonisel 10:15 kujutatud keha liikumisel selle kahele pinnaelemendile  $A$  ja  $B$  mõjuvad jõud  $\vec{R}$  on kahe komponendi - tangentsiaalse  $\vec{R}_t$  (keskkonna sisehõrdest tingitud) ja normaalse  $\vec{R}_n$  (tingitud ülerõhust piirkonnas  $A$

<sup>\*</sup> Osborne Reynolds (1842-1912), inglise füüsik ja insener.



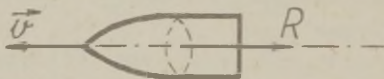
Joon. 10:15.

ning alarõhust piirkonnas  $B$ ) summa. Komponendi  $\vec{R}_t$  väärtus sõltub suurel määral keha pinna omadustest.

Kogu takistusjõud, mis ilmneb keha liikumisel, on vektorite  $\vec{R}$  geomeetriline summa, kusjuures tavaliselt on võimatu hinnata  $\vec{R}_n$  ja  $\vec{R}_t$  osatähtsust selles summas. Eriti huvitav on veel see fakt, et takistust keha liikumisele tuleb otsida mitte üksnes keha eesosas, vaid ka selle tagaosas ning just seal tekib alarõhu piirkond, mis põhjustab suure osa keha liikumist takistavast jõust.

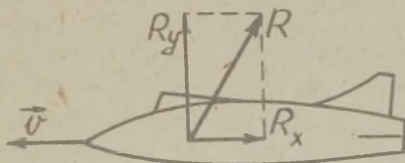
Kui vaadeldav keha on suvalise mittekorrapärase kujuga ning asetatud juhuslikult voolu suhtes, pole mitte alati võimalik arusaadavalt interpreteerida summaarset takistusjõudu. Praktikas on olulised kaks lihtsamat erandjuhtu:

a) kehal on üks sümmeetriatelg ning keha liigub selle telje suunas (mürsk). Niisugusel juhul on takistusjõud  $\vec{R}$  suunatud samuti mööda seda telge (joon. 10:16);



Joon. 10:16.

b) kehal on üks sümmeetriatasapind ning kiirus asub selles tasapinnas (lennuk, auto). Sel juhul asub ka takistusjõud  $\vec{R}$  samas tasapinnas, kusjuures selle jõu võib lahutada kaheks komponendiks:  $\vec{R}_x$  - paralleelne kiirusega (frontaalne takistus),  $\vec{R}_y$  - risti kiirusega (tõstejõud lennuki puhul) (joon. 10:17).



Joon. 10:17.

Ekspperimentaalsed uurimused on näidanud, et frontaalne takistus  $R_x$  sõltub keha frontaallõike pindalast  $S$ , mille all mõistetakse kiirusega risti olevat maksimaalse pindalaga lõiget, keskkonna tihedusest  $\rho$  (eriti on see oluline liikumisel õhus) ning liikumise kiirusest  $v$ .

Keskaste kiiruste puhul  $1 \text{ ms}^{-1}$  kuni  $200 \text{ ms}^{-1}$ , millega liiguvad kõik maapealsed sõidukid ning ka paljud lennukid, kus liikuva keha taga tekivad keerised,

$$R_x = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2, \quad (10.8)$$

kus  $C_x$  on kujutegur.

Väiksemate kiiruste korral ( $\sim 1 \text{ dm s}^{-1}$ ) kehtib seos

$$R_x = k \rho S v, \quad (10.9)$$

kus  $k$  on jällegi kujutegur.

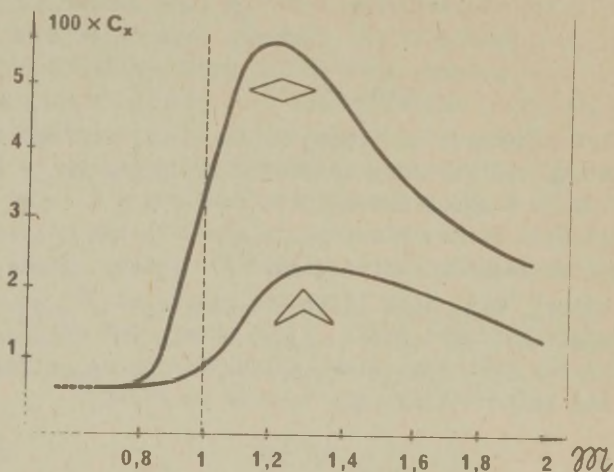


Väga väikestel kiirustel aga, näiteks väikeste udupiisakeste langemisel õhus, osutuvad olulisteks keskkonna sisehõõrdejõud ning

$$R_x = \kappa' \eta v, \quad (10.10)$$

kus  $\eta$  on keskkonna sisehõõrdetegur ning  $\kappa'$  keha kuju arvestav koefitsient.

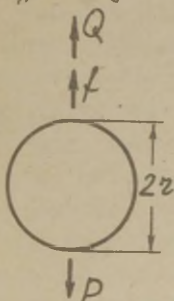
Ja lõpuks, suurte ja väga suurte kiiruste puhul, mis algavad väärtusest  $200 \text{ ms}^{-1}$ , ulatuvad helikiiruseni ning isegi ületavad selle, ei jää kujutegur  $C_x$  enam konstantseks, nagu see oli keskmistel kiirustel. Kujuteguri  $C_x$  sõltuvust nn. Machi arvust  $M = \frac{\text{keha kiirus}}{\text{heli kiirus}}$  kahe erineva kujuga tiibadega lennuki jaoks kujutab joon. 10:18, kust nähtub, et kujutegur järsult kasvab  $M = 1$  piirkonnas.



Joon. 10:18.

# Näide 1. Kuulikese langemine viskooses keskkonnas

Vaatleme kerakujulist kuulikest raadiusega  $r$ , mille aine tihedus on  $\rho$ . Asetatud vedelikku tihedusega  $\delta$ , mille sisehõõrdetegur on  $\eta$ , hakkab see kuulike kas tõusma või langema olenevalt  $\rho$  ja  $\delta$  vahekorrast. Vaatleme kuulikese langemist (tingimus:  $\rho > \delta$ ). Kuulikesele mõjub niisugusel juhul kolm jõudu (joon. 10:19): raskusjõud  $P = mg = V\rho g$ , kus  $V$  on kuulikese ruumala, Archimedesese üleslükke  $Q = V\delta g$  ning vedeliku sisehõõrdest tingitud takistusjõud, mis väljendub Stokesi<sup>§</sup> valemiga  $f = 6\pi r v \eta$ , kus  $v$  on kuulikese kiirus.



Kuulikese liikumise võrrand niisugusel juhul on

$$m \frac{dv}{dt} = (\rho - \delta) V g - 6\pi r v \eta$$

Joon. 10:19.

Arvestades, et  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ,

saame selle võrrandi kujul

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho - \delta}{\rho} g - \frac{9\eta}{2\rho r^2} v \quad (8)$$

Siit nähtub, et kiiruse  $v$  kasvades kiirendus  $\frac{dv}{dt}$  väheneb. Algmomendil  $v = 0$ , hiljem kiirus kasvab, ning kui see kiiruse kasv ajaga aeglustub, kiirus ikkagi kasvab, kuni saavutab oma maksimaalse võimaliku väärtuse

$$v_0 = \frac{2r^2 g}{9\eta} \frac{\rho - \delta}{\rho}, \quad (10.11)$$

kui  $\frac{dv}{dt} = 0$ .

Võrrandile (8) võib anda nüüd järgmise kuju:

<sup>§</sup> George Stokes (1819-1903), iiri füüsik ja matemaatik.

$$\beta \frac{dv}{dt} = v_0 - v,$$

kus

$$\beta = \frac{2v_0^2 \rho}{g\eta}$$

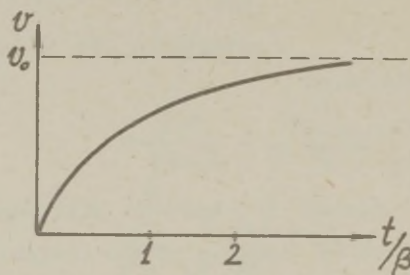
Siit

$$\beta \frac{dv}{v - v_0} = -dt$$

Viimase võrrandi lahend on

$$v = v_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\beta}} \right) \quad (10.12)$$

Saadud tulemust kujutab graafik joon. 10:20.



Joon. 10:20.

Praktiline väärtus on selle protsessi lõppstaadiumil, alates momendist, kus liikumine stabiliseerub ( $v = v_0$ ), sest määratud eksperimentaalselt selle ühtlase liikumise kiiruse, saab valemist (10.11) arvutada vedeliku sisehõõrde teguri.

## Näide 2. Autode ja kiirrongide liikumine

Autode ja rongide liikumist takistav jõud koosneb kahest komponendist:

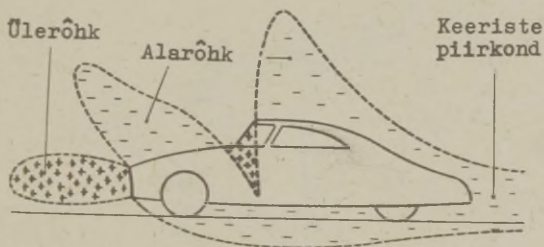
a) õhutakistus  $R_x$ , mis pakub huvi kiiruste korral, kus ta on võrdeline kiiruse ruuduga (10.8):

$$R_x = \frac{1}{2} \rho S c_x v^2$$

b) takistus veeremisel, mis üldjoontes on võrdeline auto või rongi massiga. Normaalsete autokummide puhul keskmise kvaliteediga teel arvestatakse 22 kG ühe tonni kaalu kohta. See jõud praktiliselt ei sõltu kiirusest.

Niisiis sõiduki liikudes mingi kiirusega tuleb mootoril teha tööd peamiselt õhutakistuse ületamiseks. Lihtsad arvutused näitaksid, et kiirusel  $\sim 120 \text{ km/h}$  on õhutakistus umbes kolm korda suurem kui teetakistus veeremisele, ning võimsus, mida mootor peab arendama, kasvab võrdeliselt kiiruse kuubiga. Konstruktorite ülesandeks on siis tegurite  $S$  ja  $c_x$  vähendamine.  $S$  sõltub sõiduki mõõtmetest (sõiduautodel on  $S \approx 2 \text{ m}^2$ ). Mis puutub kujutegurisse  $c_x$ , siis 1935.a. peeti hästi profileerituks autot, mille  $c_x = 0,65$ . 1960.a. sõiduautodel kõigub  $c_x$  vahemikus  $0,27 - 0,32$ . Spetsiaalsetel võidusõiduautodel  $c_x \approx 0,15$ .

Joonisel 10:21 on näidatud rõhkude jaotus sõiduauto pinnaal.



Joon. 10:21.

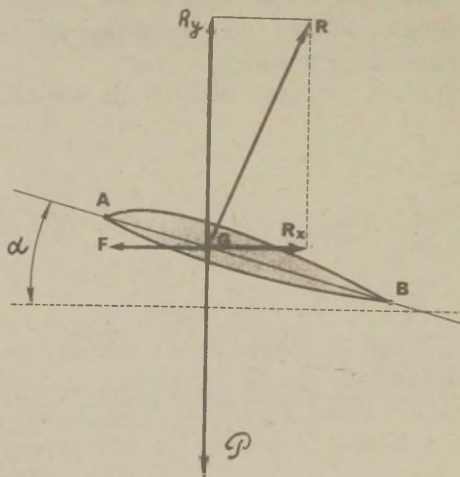


### Näide 3. Lennukite liikumine

Ülesande lihtsustamise eesmärgil vaatleme ainult lennuki ühtlast horisontaalset sirgjoonelist liikumist õhus ning selgitame välja, kuidas õhutakistus lennuki kandepindadeks olevatele tiibadele hoiab lennukit õhus jääval kõrgusel, kui mootor arendab vajalikku võimsust ning kindlustab vajaliku jõu liikumise suunas.

Joonisel 10:22 on kujutatud lennukitiiva profiil, kus  $\alpha$  on nn. atakiserv ning  $\alpha$  atakinurk. Lennul mõjuvad lennukitiivale järgmised jõud: mootori tõmme -  $\vec{F}$  (horisontaalne); lennuki kaal -  $\vec{P}$  (vertikaalne); õhu kogutakistus -  $\vec{R}$  (kõik kolm jõudu on rakendatud lennuki massikeskmes  $G$ ). Ühtlase horisontaalse liikumise korral peab nende jõudude resultant olema null:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = 0$$



Joon. 10:22.

Kui lahutada  $\vec{R}$  komponentideks  $\vec{R}_x$  ja  $\vec{R}_y$  :

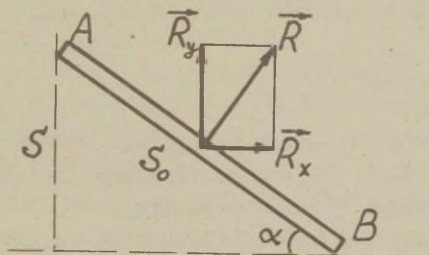
$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y,$$

siis jõudude tasakaal tähendab, et

$$\vec{R}_x = -\vec{F} \quad \text{ja} \quad \vec{R}_y = -\vec{F}$$

Kui jõud  $F$  suureneb, suureneb  $R_x$  ning ka  $R_y$  ja lennuk tõuseb kõrgemale ning tema kiirus suureneb. Mõne aja möödudes, kui  $R_x$  saab jälle võrdseks  $F$ -ga, saabub uuesti jõudude tasakaal ja lennuk liigub jälle horisontaalselt uue konstantse kiirusega. Kuid teistel võrdsetel tingimustel  $R$  väheneb tõusuga, sest kõrgusega väheneb õhu tihedus  $\rho$ . Alates teatud kõrgusest mootori antud võimsuse korral (teatud  $F$  puhul) ning atakinurga  $\alpha$  maksimaalse väärtuse juures (mille määrab lennuki konstruktsioon) lennuk kõrgele tõusta enam ei saa, ta on saavutanud oma "lae".

Lennuki lennuomaduste iseloomustamiseks kasutatakse nn. polaare. Lihtsustame ülesannet, vaadeldes lennukitiiba kui õhukest tasaplaati  $AB$  (joon. 10:23), mille pindala (kandepind) on  $S_0$ .



Joon. 10:23.

Tähistanud atakinurga  $\alpha$  -ga, saame frontaallõike pindala

$$S = S_0 \sin \alpha$$

Kui atakinurk on küllalt väike (näiteks alla  $10^\circ$ , mis on lennul normaalne), siis võib lugeda  $\sin \alpha \approx \alpha$  ning

$$S = S_0 \alpha$$

Teades, et takistusjõud  $R$  on ligikaudu võrdeline frontaallõike pindalaga, saame

$$R \approx A \alpha,$$

kus  $A = \text{const.}$

Et  $R$  on küllalt täpselt risti kandepinnaga, siis tema komponendid

$$R_x = R \cos \alpha \approx A \alpha \cos \alpha,$$

$$R_y = R \sin \alpha \approx A \alpha \sin \alpha$$

ehk

$$R_x \approx A \alpha,$$

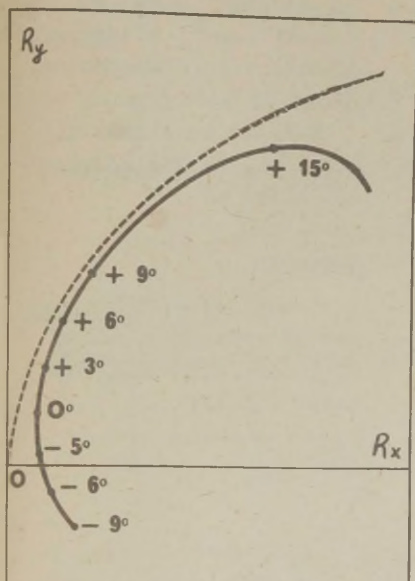
$$R_y \approx A \alpha^2$$

Elimineerinud viimasest võrrandisüsteemist  $\alpha$ , saame

$$R_x = \frac{1}{A} R_y^2$$

Kujutades seda sõltuvust tasapinnal  $(R_x, R_y)$ , saame joonisel 10:24 punktiirjoonega tõmmatud parabooli, mida nimetatakse polaarjooneks ehk polaariks.

Reaalselt pole lennukitiib kaugeltki tasaplaad, selle polaari arvutamine puhtteoreetiliselt on võimatu, küll aga saab määrata polaari eksperimentaalselt, kasutades selleks vastava kujuga tiiva maketti, mis paigutatakse õhuvoolu



Joon. 10:24.

laar küllalt lähedane teoreetilisele. Viimane asjaolu õigustab teatud määral lihtsustatud teooriat.

Lennuk on seda paremini konstrueeritud, mida suurem on suhe  $\frac{R_y}{R_x}$ . Tasaplaadi puhul on see suhe 6-7; tänapäeva lennukitel aga ulatub 20-25-ni.

Lennukitiiva profiil on teinud läbi pika ja keerulise arengu, alates ümmargusest atakiservast ja nõgusast aluspinnast, kuni tänapäeval on jõutud otsusele, et terav atakiserv on palju kasulikum.

Probleem läheb veel palju keerulisemaks, kui lennuk peab liikuma kiirusega, mis ületab helikiiruse.

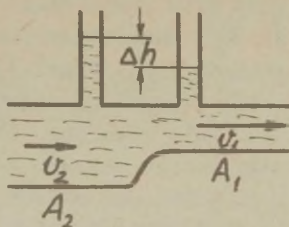
#### Ülesanne 10-1.

Mitteühtlase ristlõikega horisontaalset toru mööda (joon 10:25) voolab vesi. Toru ristlõiked tema erinevates osades

ning siis mõõdetakse  $R_x$  ja  $R_y$  aerodünaamiliste kaalude abil. Samal joonisel (10:24) on kujutatud ühele reaalsele tiivale vastav polaar. Sellest joonisest nähtub, et (1) kandejõud  $R_y$  võib olla positiivne ka negatiivsete atakinurkade puhul. See tulemus on veidi ootamatu, kuid siiski arusaadav, kui arvestada, et tiiva profiili kuju pole sümmeetriline.

(2) Positiivsete atakinurkade  $\alpha$  korral  $+3^\circ$  kuni  $10^\circ$ , mis tegelikult kõige sagedamini esinevadki, on reaalne po-





Joon. 10:25.

$A_1$  ja  $A_2$  on vastavalt  
 $S_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$  ning  $S_2 =$   
 $= 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ , veesamba-  
 nivoode vahe rõhusondides  
 $\Delta h = 0,2 \text{ m}$ .

Määrata toru ristlõi-  
 get 1s jooksul läbinud  
 vee hulk  $Q$ .

# Lahendus.

Vaadeldes vett kui ide-  
 aalset vedelikku, võime  
 kirjutada Bernoulli võr-  
 randi (10.4):

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2,$$

S.O.

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

Teiselt poolt avaldub sama staatiliste rõhkude vahe rõ-  
 husondide näitade vahena:

$$p_2 - p_1 = \Delta h \rho g$$

Järelikult

$$\Delta h \rho g = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

Lisame sellele võrrandile veel pidevuse võrrandi (10.2)

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

ning lahendanud koos kaks viimast võrrandit, saame

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta h g}{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}}{1 - \frac{1}{4}}} = \underline{\underline{2,29 \text{ ms}^{-1}}}$$

Määratud vedeliku voolamise kiiruse  $v_1$  lõikes  $S_1$ , saame arvutada seda lõiget 1 s jooksul läbinud vedeliku ruumala:

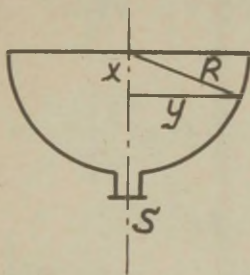
$$V = v_1 S_1 = 2,29 \text{ m s}^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 2,29 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Läbivoolanud vee mass on järelilikult

$$\underline{\underline{Q = 2,29 \text{ kg s}^{-1}}}$$

### Ülesanne 10-2.

Poolkerakujuline anum raadiusega  $R = 0,1 \text{ m}$  (joon.10:26)



Joon. 10:26.

on ääreni täidetud vee-  
ga. Anuma põhjas on ava  
pindalaga  $S = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ .  
Kui pika aja jooksul  
voolab selle ava kaudu  
nii palju vedelikku väl-  
ja, et veepind anumas  
langeks  $\frac{R}{2}$  võrra?

Joa kontraktsioonikoe-  
fitsient  $\mu = 0,6$ .

### Lahendus.

Torricelli valem (10.5) järgi joa kiirus

$$v = \sqrt{2g(R-x)}$$

Ajavahemikus  $dt$  ava kaudu väljavoolanud vee ruumala

$$dV = \mu S v dt$$

Teiselt poolt

$$dV = \pi y^2 dx,$$

järelikult

$$\mu S \sqrt{2g(R-x)} dt = \pi y^2 dx$$

Kuna

$$y^2 = R^2 - x^2,$$

sile

$$\mu S \sqrt{2g} \sqrt{R-x} dt = \pi (R^2 - x^2) dx,$$

kust

$$dt = \frac{\pi}{\mu S \sqrt{2g}} \left( \frac{R^2}{\sqrt{R-x}} - \frac{x^2}{\sqrt{R-x}} \right) dx$$

Otsitav aeg

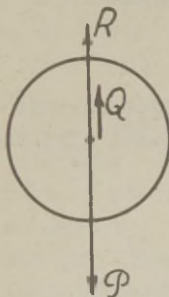
$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\pi}{\mu S \sqrt{2g}} \int_0^R \left[ R^2 (R-x)^{-\frac{1}{2}} - x^2 (R-x)^{-\frac{1}{2}} \right] dx = \\ &= \frac{\pi}{\mu S \sqrt{2g}} \left[ -2R^2 \sqrt{R-x} + 2R^2 \sqrt{R-x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} R \sqrt{(R-x)^3} + \frac{2}{5} \sqrt{(R-x)^5} \right]_0^R = \\ &= \frac{\pi}{\mu S \sqrt{2g}} \left[ \frac{2}{5} \sqrt{\frac{R^5}{2^5}} - \frac{4}{3} R \sqrt{\frac{R^3}{2^3}} - \frac{2}{5} \sqrt{R^5} + \frac{4}{3} R \sqrt{R^3} \right] = \\ &= \frac{\pi}{\mu S \sqrt{g}} R^2 \sqrt{R} \frac{28\sqrt{2} - 17}{30} = 493s = \underline{\underline{8,22 \text{ min}}} \end{aligned}$$

### Ülesanne 10-3.

Valkses õhus langeb vertikaalselt kerakujuline rahetera läbimõõduga  $D = 1 \text{ cm}$ . Õhutakistus niisuguse kuulikese liikumisele avaldub valemiga  $R = k_S v^2$ , kus kujutegur  $k = 0,27 \text{ SI-ühikut}$ . Jää tihedus  $\rho = 999 \text{ kg m}^{-3}$ .

Määrata selle rahetera püsima jäännud langemiskiirus  $v_0$ .

#### Lehendus.



Joonisel 10:27 kujutatud jõud  $P$  on rahetera kaal,  $Q$  - Archimedese üleslükke ning  $R$  - õhutakistus. Uuritavas olukorras on need jõud tasakaalus:

$$P = Q + R$$

Et

$$P = \frac{\pi D^3 \rho g}{6},$$

$$R = k \frac{\pi D^2}{4} v^2$$

Joon. 10:27. ning  $Q$  on tähtsusetult väike võrreldes raskusjõuga  $P$ , siis võime jõudude tasakaalu tingimuse kirjutada lihtsustatud kujul

$$k \frac{\pi D^2}{4} v_0^2 = \frac{\pi D^3 \rho g}{6}$$

ning siit

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2 \rho g D}{3k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 999 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 10^{-2} \text{ m}}{3 \cdot 0,27 \text{ kg m}^{-3}}} = \\ &= \underline{\underline{15 \text{ m s}^{-1}}} \end{aligned}$$



#### Ülesanne 10-4.

Auto ( $S = 2,2 \text{ m}^2$ ;  $C_x = 0,3$ ), mille mootori võimsuse maksimum  $P = 56 \text{ hj}$ , võib arendada horisontaalsel teel kiirust kuni  $v = 144 \text{ km/h}$ . Antud mudeli rekonstrueerimisel vähendatakse auto mõõtmeid nii, et frontaallõige saab uue väärtuse  $S' = 2 \text{ m}^2$ , kusjuures  $C_x$  jääb endiseks. Millist võimsust  $P'$  peab arendama mootor nüüd, et kiirus horisontaalsel teel võiks saavutada väärtuse  $v' = 162 \text{ km/h}$ ?

Teetakistus lugeda mõlemal juhul samaks.

#### Lahendus.

Tähistanud õhutiheduse  $\rho$ -ga ning teetakistuse auto liikumisele  $R_t$ -ga, võime kahe olukorra puhul kirjutada kogutakistuse  $R$  ja  $R'$  auto liikumisele

$$R = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2 + R_t,$$

$$R' = \frac{1}{2} C_x \rho S' v'^2 + R_t$$

ning samuti kummagi juhu korral

$$P = Rv,$$

$$P' = R'v'$$

Nendest võrranditest järgneb:

$$\frac{P'}{v'} - \frac{P}{v} = \frac{1}{2} C_x \rho (S' v'^2 - S v^2)$$

ning siit

$$P' = v' \left[ \frac{P}{v} + \frac{1}{2} C_x \rho (S' v'^2 - S v^2) \right];$$

$$P' = \frac{162 \cdot 10^3 \text{ m}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ s}} \left[ \frac{56 \cdot 736 \text{ W} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ s}}{144 \cdot 10^3 \text{ m}} + \right]$$

$$+ \frac{0,3 \cdot 1,29 \text{ kg m}^{-3}}{2} \left\{ 2 \text{ m}^2 \left( \frac{162 \cdot 10^3 \text{ m}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ s}} \right)^2 - 2,2 \text{ m}^2 \left( \frac{144 \cdot 10^3 \text{ m}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ s}} \right)^2 \right\},$$

$$\underline{\underline{P' = 51,3 \text{ kW}}}$$

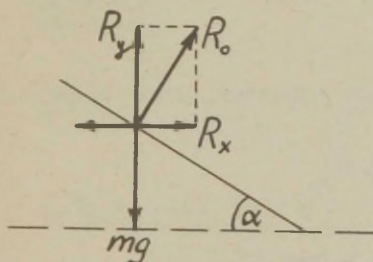
#### Ülesanne 10-5.

Lennuki liikudes horisontaalselt seisvas õhus normaaltingimustes avaldab õhk selle liikumisele takistust, mille võib väljendada valemiga  $R_0 = 2,5 S v^2$  ( $S$  – ühikutes). On teada, et lennuki mass  $m = 10 \text{ t}$ , tema frontaallõike pindala  $S = 40 \text{ m}^2$  ning atakinurk  $\alpha = 0,1 \text{ rad}$ .

Määrata:

- kiirus, mille juures lennuk tõuseb õhku;
- kujutegur  $C_x$ ;
- mootori poolt arendatav võimsus õhku tõusmise momendil;
- millist võimsust peab arendama mootor, et lennata horisontaalselt püsiva kiirusega kõrgusel  $10 \text{ km}$ , kus temperatuur on  $0^\circ \text{C}$  ja atmosfäärirõhk  $p = 200 \text{ mm Hg}$ ?

#### Lahendus (joon. 10:28).



Joon. 10:28.

- a) Õhku tõusmise momendil peab tõstejõud  $R_y = R_0 \cos \alpha$  ületama raskusjõu  $mg$ :

$$R_0 \cos \alpha = mg,$$

s.o.

$$2,5 S v_0^2 \cos \alpha = mg$$

Et  $\cos \alpha \approx 1$ , siis

$$v_0 = \sqrt{\frac{mg}{2,5 S}} = \sqrt{\frac{10^4 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}}{2,5 \cdot 40 \text{ m}^2 \text{ s}^2}} = \underline{\underline{31,4 \text{ m s}^{-1}}}$$

$$b) R_{0x} = R_0 \sin \alpha \approx R_0 \alpha = 2,5 \text{ S } v_0^2 \alpha$$

Teiselt poolt

$$R_{0x} = \frac{1}{2} C_x \rho_0 S v_0^2,$$

$\rho_0$  on õhutihedus normaalingimustes:

$$\rho_0 = \frac{\mu}{\omega_0},$$

kus  $\mu$  on kilomooli õhu mass ( $29 \text{ kg kmool}^{-1}$ ) ning  $\omega_0$  kilomooli õhu ruumala normaalingimustes ( $22,4 \text{ m}^3 \text{ kmool}^{-1}$ ).

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{2 \cdot 2,5 \alpha}{\rho_0} = \frac{2 \cdot 2,5 \alpha \omega_0}{\mu} = \\ &= \frac{2 \cdot 2,5 \text{ N m}^{-2} \text{ s}^2 \cdot 0,1 \cdot 22,4 \text{ m}^3 \text{ kmool}^{-1}}{29 \text{ kg kmool}^{-1}} = \underline{\underline{0,38}} \end{aligned}$$

c) Mootori võimsus

$$\begin{aligned} P_0 &= R_{0x} v_0 = 2,5 \text{ S } v_0^3 \alpha = \\ &= 2,5 \text{ N m}^{-2} \text{ s}^2 \cdot 40 \text{ m}^2 \cdot 31,4^3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-3} \cdot 0,1 = \underline{\underline{3,1 \cdot 10^6 \text{ W}}} \end{aligned}$$

d) Analoogiliselt punktiga c mootori poolt arendatav võimsus

$$P = R_x v,$$

kus juures

$$R_x \cong R_y \alpha = mg \alpha$$

(horisontaalsel lennul  $R_y = mg$ ).

Kuna

$$R_x = \frac{1}{2} C_x S \rho v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg\alpha}{c_x \rho S}}$$

Õhutiheduse  $\rho$  arvutame, lähtudes ideaalse gaasi olekuvõrrandist

$$\rho_0 V_0 = \frac{M}{\mu} R T_0 \quad \text{-- normaaltingimustes}$$

$$\rho V = \frac{M}{\mu} R T \quad \text{-- kõrgusel 10 km}$$

$$\rho_0 = 760 \text{ mm Hg},$$

$$\rho = 200 \text{ mm Hg},$$

$R$  on universaalne gaasikonstant,

$M$  - gaasi mass.

Viimased kaks võrrandit annavad

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M}{V} = \frac{\rho_0 T_0 \rho_0}{\rho T} = \\ &= \frac{200 \text{ mm Hg} \cdot 273 \text{ K} \cdot 29 \text{ kg kmool}^{-1}}{760 \text{ mm Hg} \cdot 273 \text{ K} \cdot 22,4 \text{ m}^3 \text{ kmool}^{-1}} = 0,34 \text{ kg m}^{-3} \end{aligned}$$

Võimsus

$$\begin{aligned} P &= R_x v = \frac{1}{2} c_x \rho S v^3 = \\ &= \frac{1}{2} c_x \rho S \frac{2mg\alpha}{c_x \rho S} \sqrt{\frac{2mg\alpha}{c_x \rho S}} = mg\alpha \sqrt{\frac{2mg\alpha}{c_x \rho S}} = \\ &= \frac{10^4 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,1 \sqrt{2 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,1}}{\sqrt{0,38 \cdot 0,34 \text{ kg m}^{-3} \cdot 40 \text{ m}^2}} = \\ &= \underline{\underline{6 \cdot 10^5 \text{ W}}} \end{aligned}$$

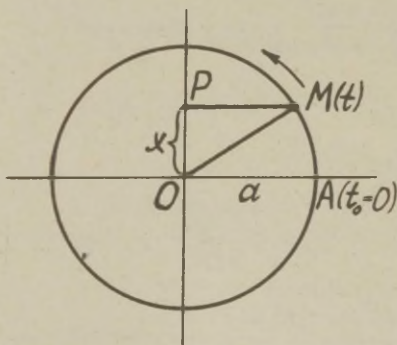


## 11. VÕNKUMISED

### 11.1. Harmoniline võnkumine

Harmoniliseks võnkumiseks nimetatakse niisugust sirglikumist, mille puhul abstsiss (liikuva keha asukohta määrav koordinaat) on aja sinusoidaalne funktsioon.

Kuna "puhast" harmonilist võnkumist on väga raske leida meid ümbritsevas igapäevases elus, nii looduses kui ka tehnikas, siis vaatleme selle liikumise kunstlikku kinemaatilist skeemi. Liikugu punkt  $M$  mööda ringjoont raadiusega



Joon. 11:1.

koordinaat ajamomendil  $t$  :

$$x = a \sin \omega t$$

(11.1)

ga  $a$  ühtlaselt nurkkiirusega  $\omega$  noolega näidatud suunas (joon. 11:1), lähtudes punktist  $A$ . Punkti  $M$  projektsioon  $P$  ringjoone vertikaalsele diameetrile liigub siis selle diameetri ulatuses üles-alla. On kerge veenduda, et punkti  $P$  liikumine on sinusoidaalne, seega harmoniline võnkumine. Tõepoolest, punkti  $P$

Võrrand (11.1) on harmoonilise võnkumise võrrandi üks võimalikke variante. Selles võrrandis suurust  $x$  nimetatakse hälbeks (s.o. võnkuva keha kangus tasakaaluasendist  $O$ ),  $a$  on hälbe maksimaalne väärtus - amplituud, siinse argument  $\omega t$  on võnkumise faas ning selles esinev  $\omega$  - võnkumise ring- ehk nurksagedus.

Nurksageduse  $\omega$  asemel võib liikumist iseloomustada veel ka sageduse või perioodiga.

Sageduseks  $\nu$  nimetatakse täisvõngete arvu, mis keha sooritab ajaühikus, seega

$$\omega = 2\pi \nu \quad (11.2)$$

Periood  $T$  on ajavahemik, mille kestel sooritatakse üks täisvõnge. Siit

$$T = \frac{1}{\nu} \quad (11.3)$$

ning kõrvuti võrrandiga (11.1) võib kasutada harmoonilise võnkumise kirjeldamiseks veel võrrandeid

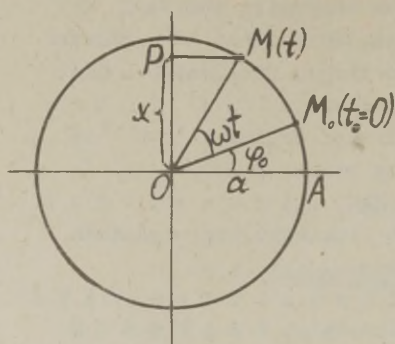
$$x = a \sin 2\pi \nu t \quad (11.1')$$

ja

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (11.1'')$$

Kõik kolm saadud võrrandit vastavad niisugusele erandolukorrale, kus punkt  $P$  alustab liikumist oma tasakaaluasendist  $O$  ning hakkab liikuma positiivses suunas, s.o. üllespoole.

Üldjuhul aga võib hakata vaatlema punkti  $P$  liikumist suvalisest asendist  $P_0$  ringjoonel liikuva punkti asetse-des  $M_0$  -s (joon. 11:2). Nüüd punkti  $P$  koordinaat ajamomendil  $t$



Joon. 11:2.

$$x = a \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (11.4)$$

kus  $\varphi_0$  on faasi väärtus ajamomendil  $t_0 = 0$  ning kannab nimetust algfaas. Analoomiliselt (11.1') ja (11.1'') võib kirjutada ka võrrandi (11.4) kaks ülejäänud varianti

$$x = a \sin(2\pi\nu t + \varphi_0) \quad (11.4')$$

ja

$$x = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad (11.4'')$$

Harmooniliselt võnkuva keha kiirus

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t \quad (11.5)$$

ning kiirendus

$$j = \frac{dv}{dt} = -a\omega^2 \sin \omega t \quad (11.6)$$

Kõigi kolme suuruse  $x$ ,  $v$  ja  $j$  muutumist ühe perioodi kestel kujutab joonis 11:3.

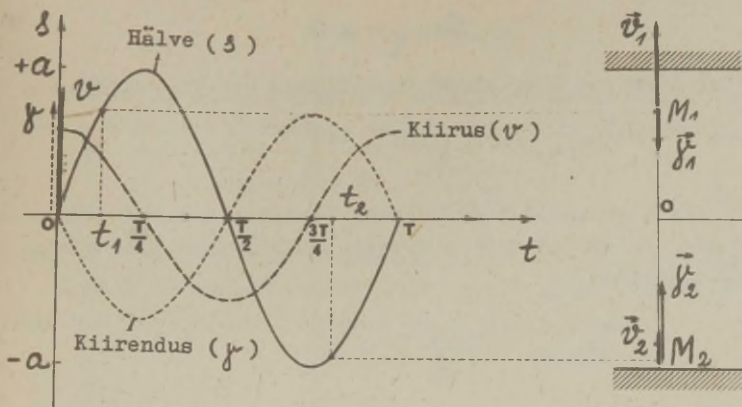
Jõud, mille mõjul vaadeldav võnkumine peaks toimuma (direktsioonijõud):

$$F = m j = -m a \omega^2 \sin \omega t$$

ehk

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{x}, \quad (11.7)$$

kus  $m$  on võnkuva keha mass. Võrrandist (11.7) nähtub, et jõud  $\vec{F}$  on võrdeline hälbe  $\vec{x}$  ning sellega vastassuunaline, seega alati suunatud tasakaaluasendi poole (siit nime-



Joon. 11:3.

tuski - direktsiooni- ehk taastuv jõud).

Sageli defineeritakse harmoonilist võnkumist kui võnkumist, mille puhul direktsioonijõud on võrdeline hälbiga.

Harmooniliselt võnkuva keha mehaaniline energia koosneb igal momendil kahest osast:

1) kineetiline

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 a^2 \cos^2 \omega t}{2}, \quad (11.8)$$

2) potentsiaalne

$$W_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{m\omega^2 a^2 \sin^2 \omega t}{2} \quad (11.9)$$

Kogu mehaaniline energia

$$W = W_k + W_p = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \quad (11.10)$$

Momendil, kui keha läbib tasakaaluasendi, on tema kiirus maksimaalne



$$v_{\max} = a\omega$$

ning kogu energia esineb kiineteilise energia kujul:

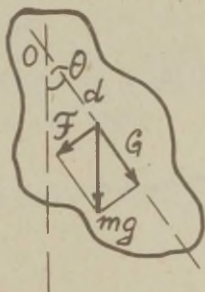
$$W_{k\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{ma^2\omega^2}{2} = W$$

Analoogiliselt võnkuva keha äärmises asendis, kui  $\chi = a$ , on potentsiaalne energia maksimaalne ning võrune kogu energiaga:

$$W_{p\max} = \frac{ma^2\omega^2}{2} = W$$

## 11.2. Füüsikaline pendel

Füüsikaliseks pendlikuks võib olla iga kindel keha, mis saab võnkuda horisontaalse telje ümber raskusjõu mõjul. Niisugusel juhul osutuvad olulisteks järgmised karakteristikud:



Joon. 11:4.

- 1) keha mass  $m$ ,
- 2) massikeskme asukoht  $G$  (joon. 11:4) ja
- 3) võnketelje asukoht  $O$ , või õigemini raskuskeskme  $G$  kaugus  $d$  võnketeljest  $O$ .

Niisugune pendel võib püsida kui tahes kaua oma tasakaaluasendis (massikeske asub telje all viimasega samal vertikaalsirgel). Kui aga keha kallutada nurga  $\theta$  võrra tasakaaluasendist ning siis

vabastada, hakkab ta võnkuma selle tasakaaluasendi kohal. Võnkumise põhjustab keha raskus, õigemini raskusjõu komponent  $F = mg \sin \theta$ , mille moment

$$M = mgd \sin \Theta$$

kutsub esile keha pöördumise tasakaaluasendi poole. Selle pöörlamise nurkkiirenduse määrab dünaamika põhivõrrand

$$-mgd \sin \Theta = J \frac{d^2 \Theta}{dt^2}, \quad (11.11)$$

kus  $J$  on keha inertsimoment pöörlamistelje  $O$  suhtes.

Saadud diferentsiaalvõrrand (11.11) muutub lihtsamaks, kui vaadelda väikesi hälbeid  $\Theta$ , mille puhul

$$\sin \Theta \approx \Theta$$

Siisugusel juhul

$$-mgd \Theta = J \frac{d^2 \Theta}{dt^2} \quad (11.11')$$

Viimase võrrandi lahendiks on

$$\Theta = \alpha \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ning

$$\frac{d\Theta}{dt} = \alpha \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

ja

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -\alpha \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Asendatud võrrandis (11.11')  $\Theta$  ja  $\frac{d^2 \Theta}{dt^2}$ , saame

$$-\frac{mgd}{J} \Theta = -\omega^2 \Theta$$

ning

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}},$$

mis annab võnkeperioodi kujul

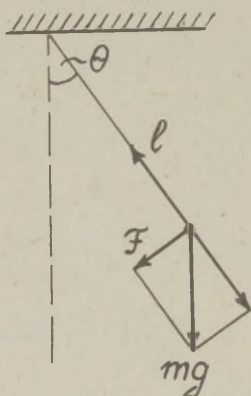
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} \quad (11.12)$$

Niisiis, tingimusel, et pendel võngub väikese amplituudiga, on võnkumine sinusoidaalne (harmooniline) ning võnkeperiood ei sõltu amplituudist. Perioodi arvutamine on võimalik, kui on teada keha inertsimoment  $J$  võnketelje suhtes ning masskeskme ja telje vaheline kaugus  $d$ . Vastasel juhul peab perioodi määrama katsest.

### 11.3. Matemaatiline pendel

Matemaatilise pendli moodustab kaaluta ja venimatu niidi otsa riputatud ainepunkt, mis võngub raskusjõu mõjul vertikaaltasandis. Matemaatilist pendlit iseloomustavad kaks suurus: ainepunkti

mass  $m$  ja niidi (pendli) pikkus  $\ell$  (joon. 11.5). Pendli tasakaaluasendiks on vertikaalasend. Viidud välja tasakaaluasendist mingi nurga  $\theta$  võrra ning vabastatud, hakkab pendel võnkuma tasakaaluasendi kohal, kusjuures direktsioonijõuks on raskusjõu  $mg$  niidiga risti olev komponent



$$F = mg \sin \theta$$

Vaadeldes matemaatilist pendlit kui füüsikalise pendli piirjuhtu, saame arvutada selle võnke-

perioodi füüsikalise pendli jaoks tuletatud valemist (11.12):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}},$$

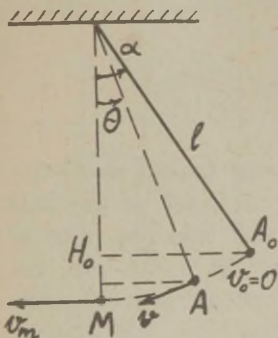
kus  $J = m\ell^2$  ning  $d = \ell$ , siis

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (11.13)$$



On arusaadav, et ka see valem kehtib vaid väikeste hälvetete korral ning ka siin ei sõltu periood võnkeamplituudist.

Vaatleme veel matemaatilise pendli liikumiskirust ja energiat. Olgu matemaatiline pendel ( $m, \ell$ ) kallutatud nurga  $\alpha$  võrra tasakaaluasendist (asendisse  $H_0$ ) (joon. 11:6). Valinud potentsiaalse energia nullnivooks horisontaaltasandi läbi punkti  $M$ , võime pendli energia avaldada kui



$$W = mgl(1 - \cos \alpha) \quad (11.14)$$

Kineetiline energia pendli selles asendis on null. Vabastatult hakkab pendel liikuma tasakaaluasendi poole ning asendis  $A$  on osa tema potentsiaalsest energiast

$$\Delta W_p = -mgl(\cos \theta - \cos \alpha)$$

Joon. 11:6.

muundunud kineetiliseks

$$W_k = \frac{mv^2}{2},$$

S.O.

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(\cos \theta - \cos \alpha)$$

Viimasest võrrandist saame avaldada pendli kiiruse punktis  $A$

$$v = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \alpha)} \quad (11.15)$$

ning maksimaalse kiiruse punktis  $M$  :

$$v_{max} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}$$

Väärrib märkimist, et pendli kiirus punktis  $M$  on niisama suur, kui oleks vabalangemise kiirus kõrguselt  $H_0$ ,



kuid ei tohi unustada, et liikumine mööda kaart  $AOB$  ei ole ühtlaselt kiirenev, nagu see oleks vabalangemise korral; samuti on ka selle liikumise kestus erinev vabalangemise kestusest.

Väikeste hälvete korral  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$  ning pendli energia

$$W = \frac{1}{2} mgl\alpha^2 \quad (11.14')$$

#### 11.4. Omaõõnkumised

Belnevalt vaadeldud pendlite õõnkumised on nn. omaõõnkumised. Omaõõnkumiste sageduse määravad süsteemi parameetrid (näiteks matemaatilise pendli pikkus). Omaõõnkumisi võib kohata üsna tihti. Peale mitmesuguste pendlite võiks veel nimetada vedelikku asetatud areomeetri vertikaalseid õõnkumisi jms. Niisugused õõnkumised algavad iga kord, kui süsteem viiakse tasakaaluasendist välja või kui talle antakse impulsi mingi algkiirus. Mõlemal juhul saab süsteem mingi hulga energiat. Kui süsteemis hõõrdumine täielikult puuduks, siis säilitaks süsteem selle energia ning õõnkumisel see vaid muunduks kineetilisest potentsiaalseks ja tagasi.

Oletades, et hõõrdumine puudub, saab mehaanilise energia jäävuse seadusest väga lihtsalt määrata omaõõnkumiste sageduse:

$$W_{kmax} = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$$

vastab momendile, mil keha läbib tasakaaluasendi,

$$W_{pmax} = \frac{\kappa a^2}{2}$$

vastab keha äärmisele asendile, kus direktsioonijõud  $F = \kappa a$ ,

$$\frac{m\omega^2 a^2}{2} = \frac{\kappa a^2}{2}$$

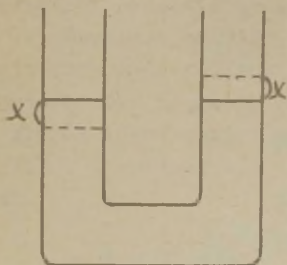
ning

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

(11.16)

Niisugune võnkesageduse määramise meetod osutub paljudel juhtudel lihtsamaks kui mõni teine.

Näide 1. Määrata vedeliku võnkumise sagedus korrapärasel U-torus (ristlõige  $S$  kogu toru ulatuses sama) (joon. 11:7). Kui vedelik on tasakaalust  $x$ -i võrra välja viidud, tekib taastav jõud



$$F = 2x S \rho g,$$

kus  $\rho$  on vedeliku tihedus. Selle jõu mõjul hakkab liikuma kogu torus olev vedelik, mille mass

$$m = \rho S \ell,$$

kus  $\ell$  on vedelikusamba kogu pikkus.

Joon. 11:7.

Liikumise võrrandi võime nüüd kirjutada järgmisel kujul:

$$\rho S \ell \frac{d^2 x}{dt^2} = -2 S \rho g x$$

ehk

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{2mg}{\ell} x$$

Seega

$$\kappa = \frac{2mg}{\ell}$$

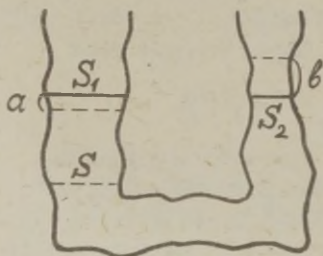
ning

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

ehk

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}$$

Näide 2. Ülesande võib püstitada ka üldisemal kujul: sama küsimus, kuid toru ristlõige  $S$  on muutlik vedeliku-samba pikkuse  $l$  ulatuses (joon. 11:8), kusjuures sõltuvus  $S(s)$  on teada. ( $s$  on mööda toru telge mõõdetav pikkus.)



Joon. 11:8.

Vedeliku mass

$$m = \int_0^l \rho S(s) ds$$

Olgu vaadeldavad võnkumised nii väikese ulatusega, et toru vasakus harus ristlõige  $S_1$  ei muutu  $a$  ulatuses ning teises harus kehtib sama  $S_2$  kohta  $b$  ulatuses. Siis

$$S_1 a = S_2 b$$

ning mingis suvalises ristlõikes pindalaga  $S$  on võnkumiste amplituud  $z$ , kusjuures

$$Sz = S_1 a$$

Kiiruse amplituud selles ristlõikes

$$v_{max} = \omega z = \omega a \frac{S_1}{S}$$

Võnkumiste koguenergia (kineetiline energia momendil, mil vedelik läbib tasakaaluasendi)

$$W = W_{kmax} = \frac{m v_{max}^2}{2},$$

$$W = \int_0^l \rho S ds \frac{\omega^2 a^2 S_1^2}{2 S^2}$$

ehk

$$W = \frac{\rho \omega^2 a^2 S_1^2}{2} \int_0^l \frac{ds}{S}$$

Veerand perioodi hiljem muundub see energia potentsiaal-  
seks, kusjuures selle hulk on võrdne tööga, mille peab te-  
gema, et tõsta ruumala  $\rho_1 a = \rho_2 b$  täis vedelikku kõrgu-  
sele  $\frac{a+b}{2}$  :

$$W = W_{pmax} = \rho \rho_1 a g \frac{a+b}{2}$$

Kuna aga

$$\rho_1 a = \rho_2 b,$$

siis

$$b = a \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

ning

$$W = \frac{\rho \rho_1 a^2 g}{2} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

Energia jäävuse seaduse põhjal

$$\frac{\rho \omega^2 a^2 \rho_1^2}{2} \int_0^{\ell} \frac{ds}{\rho} = \frac{\rho \rho_1 a^2 g}{2} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

Ning lõpuks

$$\omega^2 = \frac{g \cdot \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)}{\rho_1 \int_0^{\ell} \frac{ds}{\rho}}$$

Krijuhul, kui  $\rho = const$ , saame

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{\ell}},$$

s.o. meie esimese näite vastuse.



### 11.5. Võnkumiste sumbumine

Reaalsetes tingimustes mistahes süsteemi võnkumised sumbuvad, s.o. võnkumiste amplituud väheneb ajas ning lõpuks lakkab liikumine täielikult. Sumbumise põhjuseks on energia hajumine: võnkumiste energia kulub mitmesuguste takistuste ületamiseks. Kõige sagedamini esineb takistusi peamiselt hõõrdejõudude näol, mille sõltuvus kiirusest on üldiselt küllalt keeruline.

Vaatleme ühte lihtsamat juhtu, mis küllalt tihti tuleb praktikas ette: juht, kus hõõrdejõud on võrdeline kiirusega (näiteks vedela või gaasilise keskkonna takistav mõju võnkuvale kehale). Niisugusel juhul mõjub võnkuvale kehale kaks jõudu:

- 1) kvaasielastne (võnkumisi esilekutsuv jõud)

$$\vec{F}_1 = -\kappa \vec{x},$$

- 2) liikumist takistav hõõrdejõud

$$\vec{F}_2 = -b \vec{v}$$

Liikumise võrrand on sel juhul

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - \kappa x \quad (11.17)$$

Otsime niisuguse võrrandi lahendit kujul

$$x = a_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (11.18)$$

kus  $a_0, \beta, \omega$  ja  $\varphi$  on konstandid, mille väärtused on määratavad võnkumiste tingimustest ( $m, \kappa, b$ ).

Arvutanud  $\frac{dx}{dt}$  ja  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  ning asendanud võrrandis (11.17) need suurused saadud avaldistega, saame võrrandi

$$a_0 e^{-\beta t} [m \beta^2 \sin(\omega t + \varphi) - 2m \beta \omega \cos(\omega t + \varphi) -$$

$$-m\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) - b\beta \sin(\omega t + \varphi) + \\ + b\omega \cos(\omega t + \varphi) + \kappa \sin(\omega t + \varphi)] = 0$$

Et  $a_0 e^{-\beta t} \neq 0$  lõplike  $t$  väärtuste puhul, siis

$$[m(\beta^2 - \omega^2) - b\beta + \kappa] \sin(\omega t + \varphi) + \\ + (2m b \omega - b \omega) \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Viimane võrrand peab kehtima  $t$  igasuguste väärtuste jaoks, seepärast ajamomendil  $t'$ , kui  $\sin(\omega t' + \varphi) = 0$ ,  $\cos(\omega t' + \varphi) = \pm 1$  ning järelikult

$$2m b \omega - b \omega = 0 \quad (11.19)$$

Analoogiliselt ajamomendil  $t''$ , kui  $\cos(\omega t'' + \varphi) = 0$ ,  $\sin(\omega t'' + \varphi) = \pm 1$  ning

$$m(\beta^2 - \omega^2) - b\beta + \kappa = 0 \quad (11.20)$$

Võrrandid (11.19) ja (11.20), lahendatud koos, annavad tulemuseks

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad (11.21)$$

ja

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (11.22)$$

$a_0$  ja  $\varphi$  on määratayad liikumise algtingimustest.

Suurust  $\beta = \frac{b}{2m}$  nimetatakse sumbumisteguriks.

Sumbumise kiiruse iseloomustamiseks kasutatakse sageli nn. sumbumise logaritmilist dekrementi.

Kui ajamomendil  $t$

$$x_t = a_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

ning  $T$  võrra hiljem

$$x_{t+T} = a_0 e^{-\beta(t+T)} \sin(\omega t + \varphi + 2\pi),$$

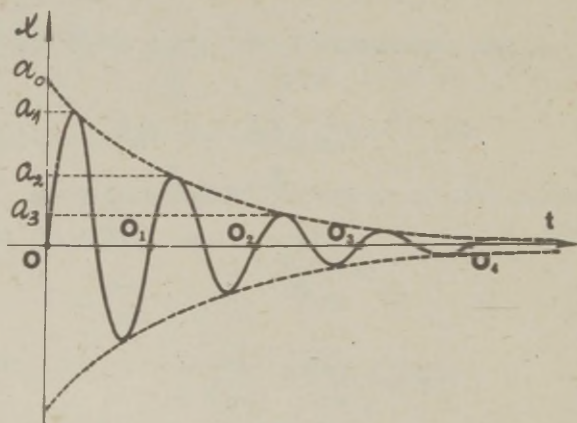
siis

$$\frac{x_t}{x_{t+T}} = e^{-\beta T}$$

Suurust  $\beta T$  nimetatakse sumbumise logaritmiliseks dekrementiks:

$$\beta T = \ln \frac{x_t}{x_{t+T}}$$

Sõltuvus  $x = a_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$  on graafiliselt kujutatud joonisel 11:9.



Joon. 11:9.

Valemist (11.22)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

nähtub, et sumbuvate võnkumiste sagedus  $\omega$  on veidi väiksem vabade omavõnkumiste sagedusest  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ :

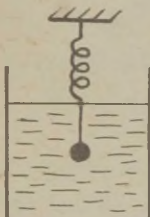
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

(11.23)

Sumbuvad võnkumised realiseeruvad alati, kui  $\beta < \omega_0$

Juhul aga, kui  $\beta \geq \omega_0$ , on liikumine aperiöödiline, s.o. tasakaaluasendist väljaviidud süsteem pöördub aegamööda tasakaaluasendisse tagasi.

Näide (joon. 11:10). Joonisel kujutatud elastne pendel



võngub sumbuvalt õhus või mõnes väikese viskoossusega vedelikus (vees). Kui vedelik on väga viskoosne (paks õli), ei ole võnkumised enam võimalikud.

Käesoleval juhul vaadeldud võnkumised on nn. vabavõnkumised.

Kui võnkumist takistavad jõud puuduvad, nimetatakse võnkumisi omavõnkumisteks.

Joon.11:10.

#### 11.6. Sundvõnkumised. Resonants

Kui ühele võnkumisvõimelisele süsteemile mõjub mingi perioodiliselt muutuv jõud, hakkab süsteem sellele jõule oma sagedusega võnkuma. Selliseid võnkumisi nimetatakse sundvõnkumisteks. Sundvõnkumiste amplituud sõltub mitte niivõrd sundiva jõu väärtusest kui selle sagedusest.

Sundvõnkumiste iseloomu määrab sundiva jõu iseloom. Vaatleme üksikasjalikult niisugust juhtu, kus

a) sundiv jõud võngub harmooniliselt:  $F = f \sin \omega t$ ,

b) võnkumised toimuvad reaalses vedelikus, kus liikumist takistav jõud on võrdeline kiirusega:  $F_f = -b\dot{x}$

Niisugusel juhul on liikumise võrrandiks

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + f \sin \omega t = 0$$



ehk

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = f \sin \omega t \quad (11.24)$$

Algul, kui sundiv jõud  $F = f \sin \omega t$  on mõjunud alles lühikest aega, liituvad sundvõnkumistega veel süsteemi omavõnkumised, mistõttu summaarne liikumine on keeruline. Testud aja möödudes omavõnkumised sumbuvad ning jäävad ainult sundvõnkumised.

On loomulik oletada, et sundvõnkumiste sagedus võrdub sundiva jõu sagedusega, s.o. et

$$x = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (11.25)$$

$a$  ja  $\varphi$  leidmiseks asendame võrrandis (11.24)  $x$  ja selle tuletised (11.25) diferentseerimisel saadud avaldistega, saame

$$\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \sin(\omega t + \varphi) + \frac{b\omega}{k} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{f}{ak} \sin \omega t$$

Tähistame keha omavõnkumiste sageduse

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0,$$

sumbumisteguri

$$\frac{b}{2m} = \beta$$

ning

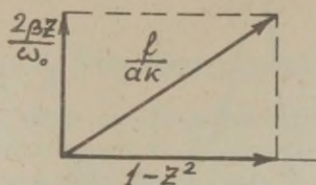
$$\frac{\omega}{\omega_0} = z,$$

saame liikumise võrrandi kujul

$$(1 - z^2) \sin(\omega t + \varphi) + \frac{2\beta}{\omega_0} z \cos(\omega t + \varphi) = \frac{f}{ak} \sin \omega t$$

Selle võrrandi lahendamiseks kasutame Fresneli<sup>⊗</sup> vektor-diagrammide meetodit (joon. 11:11).

<sup>⊗</sup> Augustin Fresnel (1788–1827), prantsuse füüsik.



Joon. 11:11.

Diagrammist nähtub, et

$$a = \frac{f}{k \sqrt{(1-z^2)^2 + \left(\frac{2\beta}{\omega_0} z\right)^2}} \quad (11.26)$$

ning

$$\tan \varphi = \frac{2\beta z}{\omega_0 (1-z^2)}, \quad (11.27)$$

s.o. sundvõnkumiste amplituud  $a$

- 1) on võrdeline sundiva jõu amplituudiga  $f$ ,
- 2) on pöördvõrdeline taastava jõuga,
- 3) väheneb sumbumisteguri  $\beta$  suurenedes.

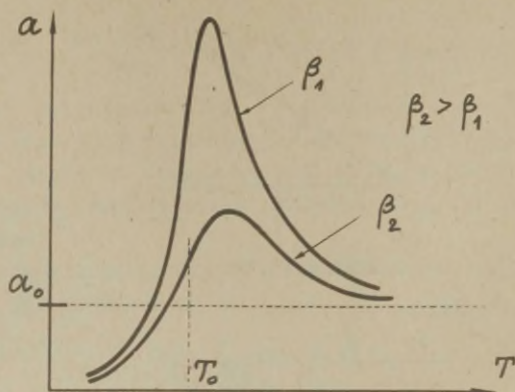
Kuid muutumatute  $f$ ,  $k$  ja  $\beta$  korral sõltub sundvõnkumiste amplituud  $a$  sageduste vahekorrist  $z$  (joon. 11:12). Sagedust, mille juures võnkumiste amplituud on maksimaalne, nimetatakse resonantssageduseks ning seda nähtust ennast resonantsiks. Kui  $\beta = 0$ , s.o. sumbumine puudub, kasvab amplituud resonantsi olukorras lõpmatult suureks. Sumbumise ( $\beta$ ) suurenedes resonantsinähtus nõrgeneb ning kaob täielikult, kui  $\beta = 1$ .

Võtnud resonantssageduse  $\omega_{res}$  määramiseks

$$\frac{da}{dz} = 0,$$

saame

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (11.28)$$



Joon. 11:12.

ning

$$a_{\max} = \frac{f}{k\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (11.29)$$

Saadud tulemused (11.28) ja (11.29) näitavad, et resonants saabub sageduse juures, mis on veidi väiksem omavõnkesagedusest  $\omega_0$ , ning et sundvõnkumiste amplituud resonantsi olukorras on võrdeline sundiva jõu amplituudiga.

Valemist (11.27)

$$\tan \varphi = \frac{2\beta z}{\omega_0(1 - z^2)}$$

järgneb:

- 1) kui  $z = 0$ , siis  $\varphi = 0$  (kui sundvõnkumiste sagedus on väga väike, siis nad on faasis sundiva jõuga);
- 2)  $z$  kasvades  $\varphi$  samuti kasvab (sundvõnkumised hilinevad ikka rohkem sundiva jõu suhtes);
- 3) resonantsi puhul, kui  $z = 1$ , siis

$$\tan \varphi = \infty \quad \text{ning} \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

- 4)  $z$  edasisel suurenemisel ning selle väga suurte väärtuste puhul, kui  $\omega \gg \omega_0$ , saab  $\varphi = \pi$ .



### 11.7. Võnkumiste liitmine

Kui ainepunkt võtab osa üheaegselt kahest või mitmest harmoonilisest võnkumisest (s.o. kui teda mõjutab üheaegselt mitu kvaasielastset jõudu), osutub resultantliikumine üldjuhul üsna keeruliseks perioodiliseks liikumiseks. Vaatleme siin vaid mõnda lihtsamat juhtu.

1) Kahe sama sagedusega ühesuunalise võnkumise liitmine on üheks lihtsamaks, kuid praktika seisukohalt küllalt tähtsaks juhuks.

Olgu liidetavate võnkumiste võrrandid

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) \\ x_2 &= a_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned} \right\} \quad (11.30)$$

(Võnkumised erinevad ainult amplituudi ja algfaasi poolest.)

Ülesande võib lahendada puhtanalüütiliselt.

Summaarne hälve ajamomendil  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) = \\ &= a_1 (\sin \omega t \cos \varphi_{01} + \cos \omega t \sin \varphi_{01}) + \\ &+ a_2 (\sin \omega t \cos \varphi_{02} + \cos \omega t \sin \varphi_{02}) = \\ &= (a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}) \sin \omega t + \\ &+ (a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}) \cos \omega t \end{aligned}$$

Tähistanud

ning

$$\left. \begin{aligned} a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02} &= a \sin \varphi_0 \\ a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02} &= a \cos \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (11.31)$$

saame

$$x = a \sin(\omega t + \varphi_0)$$



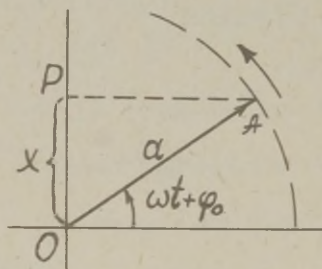
Seega on resulteeriv liikumine samasihiline sama sagedusega  $\omega$  harmooniline võnkumine, nagu seda olid lähtevõnkumised.

Resultantvõnkumise amplituudi  $a$  ning algfaasi  $\varphi_0$  leidmiseks lahendame võrrandisüsteemi (11.31) ning saame

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})}, \quad (11.32)$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}}{a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}} \quad (11.33)$$

Sama ülesande võib lahendada, kasutades Fresneli vektorite meetodit. Harmoonilist võnkumist  $x = a \sin(\omega t + \varphi_0)$  võib kujutada kui vektori  $\vec{OA}$  (pikkusega  $a$ ) otspunkti  $A$  projektsiooni liikumist mööda vertikaalset telge, kui see vektor pöörleb ümber punkti  $O$  nurkkiirusega  $\omega$  (joon. 11:13).



Joon. 11:13.

kumise suunas nurga  $\omega t$  võrra (joon. 11:15).

Joonisest (11:15) saame:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})},$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}}{a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}}$$

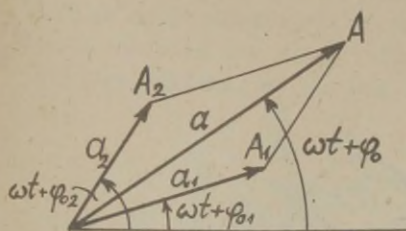
Kui kahte liidetavat võnkumist

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}),$$

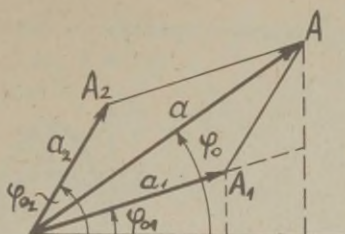
$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_{02})$$

kujutada Fresneli vektorite abil, võime need vektorid liita rõõpküliku reegli järgi (joon. 11:14).

Joonise 11:14 lugemine osutub lihtsamaks, kui seda pöörata kellaosuti lii-



Joon. 11:14.



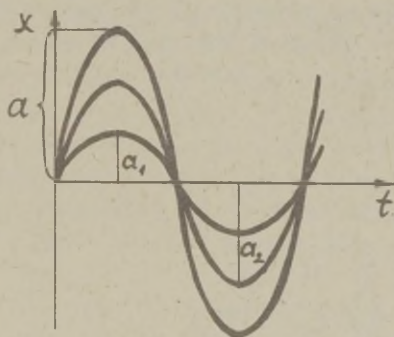
Joon. 11:15.

Avaldise (11.31)

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

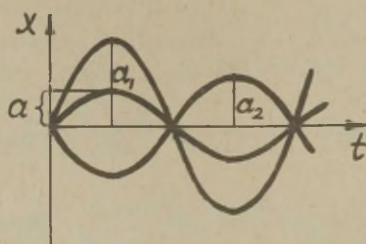
analüüs näitab, et

- 1) resultantvõnkumiste amplituud  $a$  on maksimaalne  $a_{\max} = a_1 + a_2$ , kui  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2k\pi$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) (võnkumised samas faasis). Graafiliselt kujutab nii-  
sugust olukorda joon. 11:16;



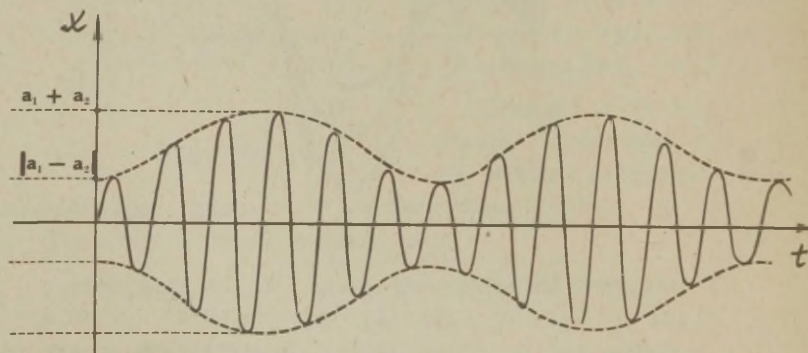
Joon. 11:16.

- 2) resultantvõnkumiste amplituud  $a$  on minimaalne:  $a_{\min} = |a_1 - a_2|$ , kui  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k+1)\pi$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) (võnkumised on vastasfaasis). Graafiliselt on selline olukord kujutatud joonisel 11:17.



Joon. 11:17.

2. Tuiklemine esineb, kui kaks liituvat võnkumist on samasihilised ning vähe erineva sagedusega. Fresneli meetodi seisukohalt on tegemist kahe vektori  $\vec{OA}_1$  ja  $\vec{OA}_2$  pöörlemisega, kusjuures nende pöörlemise nurkkiirused  $\omega_1$  ja  $\omega_2$  on veidi erinevad. Sel juhul esineb momente, kus need vektorid on samasuunalised, mis annab  $a_{\max} = a_1 + a_2$  ning momente, kus need vektorid on vastassuunalised ja  $a_{\min} = |a_1 - a_2|$ . Graafiliselt kujutab olukorda joonis 11:18.



Joon. 11:18.



Nähtus on perioodiline, perioodiks on ajaline vahemaa  $T_t$  kahe järjestikuse  $a_{\max}$  (või  $a_{\min}$ ) vahel.

Oletame näiteks, et  $\omega_2 > \omega_1$ , siis

kus  $\frac{T_t}{T_2}$  ja  $\frac{T_t}{T_1}$  on vektorite  $\vec{OA_2}$  ja  $\vec{OA_1}$  pöörete arv ajavahemikus  $T_t$  ning

$$\frac{1}{T_t} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$$

ehk tuiklemiste sagedus

$$\nu_t = \nu_2 - \nu_1$$

Üldjuhul

$$\nu_t = |\nu_1 - \nu_2| \quad (11.34)$$

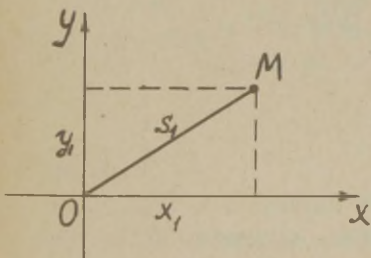
Juhul kui  $a_1 = a_2$ , on  $a_{\max} = 2a$  ning  $a_{\min} = 0$

3. Vastastikku ristuvates sihtides toimuvate võnkumiste liitmisest vaatleme mõnda konkreetset juhtu.

Oletame, et ainepunktile  $M$  mõjuvad üheaegselt kaks perioodilist jõudu sama perioodiga  $T$  kumbki ning ühe jõu mõjul peaks ta võnkuma harmooniliselt piki horisontaalset telge  $X$ , teise mõjul aga piki vertikaalset telge  $Y$ . Selleks et määrata ainepunkti  $M$  asukoht mingil ajamomendil  $t_1$ , on vaja teada sellele ajamomendile vastavaid

suurusi  $x = x_1$  ja  $y = y_1$  ning võtta need suurused punkti  $M_1$  koordinaatideks tasapinnal  $(x, y)$  (joon. 11:19). Lõik  $OM_1 = s_1$  on siis punkti liithälbeks.

Seega taandub võnkumiste liitmise ülesanne punkti poolt joonestatud kõvera leidmisele.



Joon. 11:19.



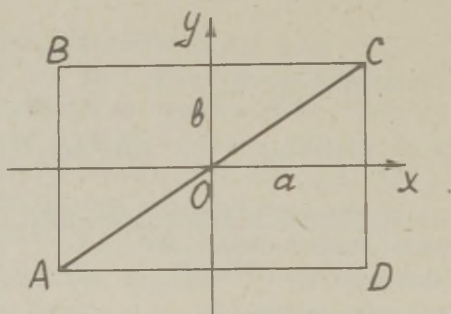
1) Kui liidetavate võnkumiste faasivahe on null:

$$x = a \sin \omega t ; \quad y = b \sin \omega t \quad (11.35)$$

Võrranditest (11.35) järeldub:

$$y = \frac{b}{a} x \quad (11.35')$$

Saadud sirge võrrand (11.35') näitab, et punkti  $M$  liikumise trajektoor on sirge, mis läbib koordinaattelgede alguspunkti  $O$  ning ühendab ristküliku külgedega  $2a$  ja  $2b$  vastastippe  $A$  ja  $C$  (joon. 11:20).



Joon. 11:20.

Kui võnkumiste faasivahe oleks  $\pi$ , võnguks punkt  $M$  mööda ristküliku diagonaali  $BD$ .

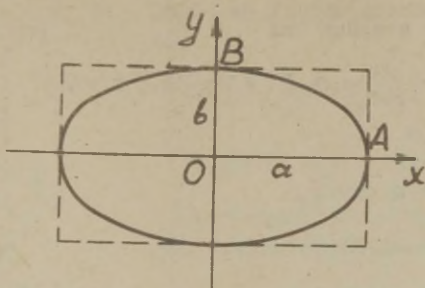
2) Kui liidetavate võnkumiste faasivahe on  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = a \cos \omega t \\ y &= b \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (11.36)$$

Võrranditest (11.36) järeldub:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11.36')$$

Selgub, et punkt  $M$  liigub mööda ellipsit, mille pooltelgedeks on kummagi liidetava võnkumise amplituudid  $a$  ja  $b$  (joon. 11:21). Punkti  $M$  liikumise suuna määramiseks



Joon. 11:21.

arvutame tema asukoha kahel ajamomendil:

$$t_1 = 0 \rightarrow x = a; y = 0 \quad (\text{punkt } A)$$

$$t_2 = \frac{T}{4} \rightarrow x = 0; y = b \quad (\text{punkt } B)$$

Seega liigub punkt mööda ellipsit vastu kellaosuti liikumise suunda.

Kui liidetavate võnkumiste faasivahe on  $\frac{3\pi}{2}$ , on resulteeriv liikumine samuti elliptiline, kuid punkt liigub mööda ellipsit eelnevaga vastassuunaliselt (kellaosuti liikumise suunas).

Üldjuhul, suvalise faasivahe korral, liigub punkt alati mööda ellipsit. Kõikide nende ellipsite ühiseks omaduseks on see, et nad on joonestatud ristküliku  $2a$ ,  $2b$  sisse.

#### Ülesanne 11-1.

Sagedusega  $\nu = 1\text{ s}^{-1}$  harmooniliselt võnkuv ainepunkt läbib ajamomendil  $t = 0$  asendi  $x_0 = 5\text{ cm}$  kiirusega  $v_0 = 20\text{ cm s}^{-1}$ . Määrata selle võnkumise amplituud  $a$  ja algfaas  $\varphi_0$ .

#### Lahendus.

Harmoonilise võnkumise võrrandi võib kirjutada kujul

$$x = a \sin(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

ning selle kiirus avaldub kui

$$v = \frac{dx}{dt} = a \cdot 2\pi\nu \cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

Ajajamomendil  $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \sin \varphi_0 \\ v_0 &= a \cdot 2\pi\nu \cos \varphi_0 \end{aligned} \right\}$$

Lehendasud selle võrrandisüsteemi, leiame

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{4\pi^2\nu^2}} = \\ &= \sqrt{25 \text{ cm}^2 + \frac{400 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}}{4\pi^2 \text{ s}^{-2}}} = \underline{\underline{5,9 \text{ cm}}} \end{aligned}$$

ning

$$\tan \varphi_0 = \frac{2\pi\nu x_0}{v_0} = \frac{2\pi \text{ s}^{-1} 5 \text{ cm}}{20 \text{ cm s}^{-1}} = 1,57,$$

$$\underline{\underline{\varphi_0 = 81^\circ}}$$

Ülesanne 11-2.

Pendel koosneb peenest vardast ( $\ell = 30 \text{ cm}$ ,  $m = 50 \text{ g}$ ), mille ülemises otsas on väike kuulike (masspunkt  $m' = 40 \text{ g}$ ) ja alumises otsas kera ( $R = 5 \text{ cm}$ ,  $M = 100 \text{ g}$ ). Määrata niisuguse pendli võnkumise periood ümber telje  $O$ , mis läbib varda keskpunkti (joon. 11:22).

Lehendus. Võnkeperiood (11.12)

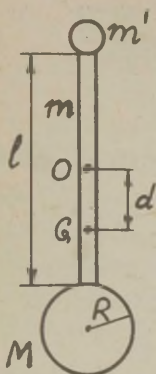
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_s g d}},$$

Süsteemi kogumass

$$m_s = M + m + m' = 190 \text{ g}$$

Masskeskme  $G$  koordinaat  $d$  telje  $O$  suhtes (9.1):

$$d = \frac{M(\frac{\ell}{2} + R) - m'\frac{\ell}{2}}{M + m + m'} = \frac{2MR + M\ell - m'\ell}{2(M + m + m')} = 7,4 \text{ cm}$$



Joon. 11:22.

Süsteemi inertsimoment telje  $O$  suhtes

$$J = m' \left( \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} m l^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M \left( \frac{l}{2} + R \right)^2 = 5,04 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Asendanud need suurused lähtevalemis, saame võnkeperioodi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5,04 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2}{0,19 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}}} = \underline{\underline{1,2 \text{ s}}}$$

### Ülesanne 11-3.

Õhuke ristkülikukujuline plaat võngub ümber horisontaalse telje, mis asub plaadi tasapinnas ning on risti plaadi ühe küljega, mille pikkus on  $\ell$ .

1) Määrata võnkumiste periood  $T$ , kui telg läbib plaadi ülemist serva.

2) Milline peab olema telje kaugus  $x$  ülemisest servast, et võnkumiste periood oleks minimaalne? Määrata selle minimaalse perioodi  $T_{\min}$  väärtus.

### Lahendus.

1) Plaadi võnkumist kirjeldatud tingimustes võib vaadelda kui peene varda pikkusega  $\ell$  võnkumist ümber temaga risti oleva horisontaalse telje  $O$  (joon. 11:23).

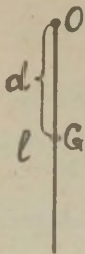
Varda massikeske asub tema keskpunktis, seega masskeskme  $G$  ja võnketelje  $O$  vaheline kaugus  $d = \frac{\ell}{2}$ .

Varda inertsimoment telje  $O$  suhtes

$$J = \frac{1}{3} m \ell^2,$$

kus  $m$  on varda mass. Varda võnkumiste periood (11.12)





seega

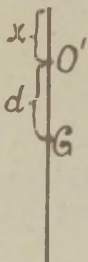
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2 \cdot 2}{3mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

Joon. 11:23.

2) Kui telg  $O'$  asub kaugusel  $x$  plaadi ülemisest servast (varda ülemisest otsast) (joon. 11:24), on võnketelje  $O'$  ja varda massikeskme  $G$  vaheline kaugus  $d' = \frac{\ell}{2} - x$ .

Inertsimoment (Huygensi lause kohaselt):



$$J' = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2 = \frac{m\ell^2 + 3m(\ell - 2x)^2}{12}$$

Võnkeperioodi  $T'$  avalduseks on nüüd

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2 + 3m(\ell - 2x)^2}{6mg(\ell - 2x)}}$$

Joon. 11:24.

$T'_{min}$  ning sellele vastava  $x$  väärtused leiame, võttes

$$\frac{dT'}{dx} = 0,$$

saame võrrandi

$$3(\ell - 2x)^2 = \ell^2,$$

kust

$$x = \ell \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = \underline{\underline{0,21\ell}}$$

ning

$$T'_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2 + 3m\left(\ell - \ell \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)^2}{6mg\left(\ell - \ell \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)}}$$

$$\underline{\underline{T_{min}' = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g\sqrt{3}}}}}$$

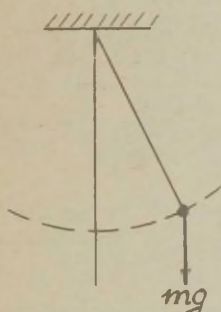
#### Ülesanne 11-4.

Matemaatilise pendli mudel pikkusega  $\ell = 50 \text{ cm}$  ripub lennuki kabiinis. Määrata pendli võnkeperiood, kui lennuk

- 1) liigub ühtlaselt,
- 2) lendab horisontaalselt kiirendusega  $a = 2,5 \text{ m s}^{-2}$ ,
- 3) planeerib  $\alpha = 15^\circ$  nurga all horisondiga.

#### Lehendus.

1) Lennuki liikudes ühtlaselt on pendli kuulikesele mõjuvaks jõuks vertikaalne raskusjõud  $mg$  (joon. 11:25) ning selle mõjul toimuvate võnkumiste periood (11.13)



Joon. 11:25.

tant

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = \\ = 2\pi \sqrt{\frac{0,5 \text{ m}}{9,81 \text{ m s}^{-2}}} = \underline{\underline{1,42 \text{ s}}}$$

2) Lennuki liikudes kiirenevalt ilmneb sellest tingitud inertsijõud (joon. 11:26)

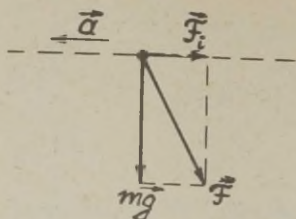
$$\vec{F}_i = -m\vec{a}$$

ning liikumist tekitavaks jõuks saab raskusjõu  $\vec{m}\vec{g}$  ja inertsijõu resul-

$$\vec{F} = \vec{m}\vec{g} + \vec{F}_i$$

Pendli võnkeperioodi valem on nüüd järgmine:

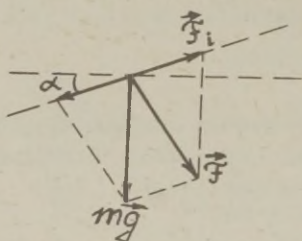
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a^2}}},$$



Joon. 11:26.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,5 \text{ m}}{\sqrt{9,81^2 + 2,5^2} \text{ m/s}^2}} = \underline{\underline{1,40 \text{ s}}}$$

3) Lennuki planeerides (joon. 11:27) on inertsijõud



Joon. 11:27.

$$F_i = mg \sin \alpha$$

ning resultantjõud

$$F = mg \cos \alpha$$

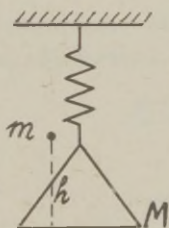
Pendli võnkeperiood

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{0,5 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2 \cos 15^\circ}} = \underline{\underline{1,44 \text{ s}}}$$

### Ülesanne 11-5.

Vaekausil (joon. 11:28), mille mass on  $M$  ning mis ripub vedru otsas elastsusteguriga  $C$ , langeb kõrguselt  $h$  väike keha massiga  $m$ . Keha ja vaekausi vaheline põrge on absoluutselt mitteelastne. Määrata amplituud  $a$ , millega kirjeldatud süsteem võnkuma hakkab.



Joon. 11:28.

### Lahendus.

Keha langeb vaekausile kiirusega  $v_1$ , mille saame määrata energia jäävuse seadusest

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgh$$

## Järelikult

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Absoluutselt mitteelastse pörke tulemusena saab süsteem kiiruse  $v$ , mille määrame liikumishulga jäävuse seadusest

$$mv_1 = (m+M)v$$

kust

$$v = \frac{m}{m+M} \sqrt{2gh}$$

Vaekausi algasendis oli vedru  $l$  võrra välja venitatud, kusjuures

$$Mg = cl \quad \text{ning} \quad l = \frac{Mg}{c}$$

Pärast pörget venib vedru nii, et kogu pikenemine saab võrdseks  $x_0$ -ga, ning energia jäävuse seadusest järgneb, et

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 + (m+M)g(x_0 - l) = \int_l^{x_0} cx \, dx,$$

$$\frac{1}{2}(m+M) \frac{m^2}{(m+M)^2} 2gh + (m+M)g(x_0 - l) = \frac{1}{2}c(x_0^2 - l^2)$$

Võttes arvesse, et  $l = \frac{Mg}{c}$ , saame

$$x_0^2 - \frac{2(m+M)g}{c} x_0 - \frac{2m^2gh}{(m+M)c} + \frac{M(M+2m)}{c^2} = 0$$

Selle võrrandi lahendid on

$$x_0 = \frac{m+M}{c}g \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{c^2} + \frac{2m^2gh}{(m+M)c}}$$

Koormatud vaekauss hakkab nüüd võnkuma ümber asendi, kus vedru on  $l'$  võrra välja venitatud, kusjuures



$$(m+M)g = c\ell'$$

ning

$$\ell' = \frac{(m+M)g}{c}$$

Seega süsteemi võnkeamplituud

$$a = x_0 - \ell' = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{c^2} + \frac{2m^2 g h}{(m+M)c}}$$

. Ülesanne 11-6.

Sumbuvate võnkumiste vaatlemisel selgus, et kahe järjestikuse võnke puhul on teise amplituud eelmisest 60% võrra väiksem. Võnkumiste periood  $T = 0,5 \text{ s}$ . Määrata nendest andmetest sumbumistegur ning sumbumata võnkumiste sagedus samades tingimustes.

. Lahendus.

Võnkumiste sumbumise logaritmiline dekrement

$$\beta T = \ln \frac{x_t}{x_{t+T}},$$

kus  $\beta$  on sumbumistegur.

Ülesande tingimustest

$$x_{t+T} = 0,4 x_t,$$

seega

$$\beta = \frac{\ln \frac{10}{4}}{0,5 \text{ s}} = \underline{\underline{1,83 \text{ s}^{-1}}}$$

Sumbuvate võnkumiste ringsagedus  $\omega$  ning vastavate sumbumata võnkumiste ringsagedus  $\omega_0$  on seotud valemiga 11.23

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \beta^2$$

Siit järgneb

$$\begin{aligned} \nu_0^2 &= \nu^2 + \frac{\beta^2}{4\pi^2} = \frac{1}{T^2} + \frac{\beta^2}{4\pi^2} = \\ &= \frac{1}{0,5^2 \text{ s}^2} + \frac{1,83^2 \text{ s}^{-2}}{4\pi^2} = 4,08 \text{ s}^{-2}, \\ \nu_0 &= \underline{\underline{2,02 \text{ s}^{-1}}} \end{aligned}$$

### Ülesanne 11-7.

Määrata kahe harmoonilise võnkumise

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}),$$

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}).$$

liitmisel tekkiwa võnkumise amplituud  $a$  ja algfaas  $\varphi_0$ , kui  $a_1 = a_2 = 5 \text{ cm}$ ,  $\varphi_{01} = 30^\circ$ ,  $\varphi_{02} = 60^\circ$ .

### Lahendus.

Kahe võrdse sagedusega samasihilise harmoonilise võnkumise liitmisel tekib sama sagedusega harmooniline võnkumine

$$x = a \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Selle võnkumise amplituud (11.32)

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})} = \\ &= a_1 \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})} = \\ &= 5 \text{ cm} \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos 30^\circ} = \underline{\underline{9,65 \text{ cm}}} \end{aligned}$$

ning algfaas (11.33)

$$\begin{aligned} \tan \varphi_0 &= \frac{a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}}{a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}} = \\ &= \frac{\sin \varphi_{01} + \sin \varphi_{02}}{\cos \varphi_{01} + \cos \varphi_{02}} = \frac{\sin 30^\circ + \sin 60^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 60^\circ} = 1, \end{aligned}$$

seega

$$\underline{\underline{\varphi_0 = 45^\circ}}$$

### Ülesanne 11-8.

Kaks sama amplituudi ning algfaasiga samasihilist harmoonilist võnkumist, mille perioodid on  $T_1 = 3\text{ s}$  ning  $T_2 = 3,1\text{ s}$ , liituvad üheks võnkumiseks. Määrata selle resultantvõnkumise ja tuiklemise perioodid.

### Lahendus.

Lähtevõnkumiste võrrandid võime kirjutada järgmisel kujul:

$$x_1 = a \sin(\omega_1 t + \varphi_0),$$

$$x_2 = a \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$$

Nende võnkumiste liitmisel

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = a [\sin(\omega_1 t + \varphi_0) + \sin(\omega_2 t + \varphi_0)] = \\ &= 2a \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi_0 \right) \end{aligned}$$

Siit resultantvõnkumiste periood

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{2}{\frac{\omega_1}{2\pi} + \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} = \underline{\underline{3,05\text{ s}}}$$

Resultantvõnkumiste amplituud muutub perioodiliselt perioodiga

$$T' = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

Amplituudi muutumise ühe perioodi kestel esineb kaks amplituudi tugevnemist ning samuti kaks amplituudi nõrgenemist, seega tuiklemise periood on

$$\frac{T'}{2} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = \underline{\underline{93 \text{ s}}}$$

### Ülesanne 11-9.

Ainepunkt võtab üheaegselt osa kahest vastastikku ristuvast sama sagedusega harmoonilisest võnkumisest, mille amplituudid on võrdsed:  $a_1 = a_2 = a = 5 \text{ cm}$  ning faasivähe  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Määrata selle ainepunkti liikumine.

### Lahendus.

Toimugu üks võnkumine telje  $x$ , teine telje  $y$  sihis (joon. 11:29); siis võnkumiste võrrandid on

$$x = a \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

$$y = a \sin \omega t$$

ehk

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = a \sin \omega t$$

Nendest võrranditest järgneb:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

Joon. 11:29.

s.o. et vaadeldav ainepunkt liigub mööda ringjoont raadiusega  $a = 5 \text{ cm}$ .

Ajamomendil  $t = 0$  on  $x = a$ ,  $y = 0$  (punkt A)

ning momendil  $t = \frac{T}{4}$  -  $x = 0$ ,  $y = a$  (punkt B)

Seega liigub ainepunkt mööda ringjoont kellaosuti vastassuunas.



## 12. LAINED

### 12.1. Lained elastses keskkonnas

Kui keskkonnas asetsev keha (näiteks selle keskkonna üks osake) võngub seaduse järgi

$$x = a \sin \omega t,$$

siis ta mõjutab temaga kokkupuutes olevaid keskkonna osakesi jõuga, mis muutub sama seaduse järgi:

$$F = F_0 \sin \omega t$$

Selle jõu mõjul tõmmatakse keskkonna osakesed sundvõnkumisse sama sagedusega. Kuna keskkonna osakeste vahel valitsevad teatud sidemed jõudude näol, siis niisugune võnkliikumine levib keskkonnas teatud kiirusega  $u$ , mille väärtus sõltub keskkonna omadustest. Võnkumiste levimise protsessi keskkonnas nimetatakse laineks.

Kui keskkonna osakesed võnguvad piki laine levimise suht, nimetatakse lainet pikilaineks. Pikilainete näitena võib nimetada helilaineid.

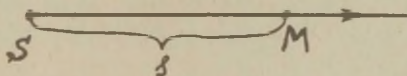
Kui aga võnkumised toimuvad risti laine levimise suhtiga, on tegemist ristlainega. Ristlainete näiteks on vee pinnal levivad lained.

Lainet iseloomustavateks suurusteks on kõigepealt võnkumiste karakteristikud: amplituud  $a$ , sagedus  $\nu$  (ring-sagedus  $\omega$ ) ja periood  $T$ . Nendele lisandub võnkumiste levimise kiirus keskkonnas  $u$  ning lainepikkus  $\lambda$  -

kauguse, mille võrra võnkumine levib perioodi kestel. Seega

$$\lambda = uT \quad (12.1)$$

## 12.2. Lainevõrrand



Joon. 12:1.

Olgu (joon. 12:1)  $S$  laineallikaks, mis võngub seaduse järgi

$$x = a \sin \omega t$$

ning levigu võnkumine mööda sirget noolega näidatud suunas kiirusega  $u$ . Kui oletada, et võnkumised ei sumbu, s.o. et amplituud jääb samaks olenemata kaugusest, mis laine on läbinud, siis punkt  $M$ , mis asub kaugusel  $s$  laineallikast, hakkab võnkuma seaduse järgi

$$x = a \sin \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) \quad (12.2)$$

$\frac{s}{u}$  on aeg, mille võrra punkti  $M$  võnkumised hilinevad punkti  $S$  suhtes. Võrrandit (12.2) nimetatakse lainevõrrandiks. Sagedamini kirjutatakse teda kujul

$$x = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right), \quad (12.2')$$

mis saadakse elementaarsete teisenduste kaudu selle esialgsest variandist.

### 12.3. Energia levimine laineprotsessis

Mingis keskkonnas paiknev võnkuv keha osutub laineallikaks. Selle keha energia arvel hakkavad võnkuma kehaga kokupuutuvad keskkonna osakesed. Need annavad energiat edasi oma naaberosakestele, mis omakorda astuvad võnkumisprotsessi jne. Nii kandub energia võnkuvalt kehalt keskkonda - see keha kiirgab energiat.

Laineallikaks võib olla kas ainepunkt või paljude ainepunktide kogu, kusjuures kõik need ainepunktid võnguvad sama sagedusega  $\nu$  ning samas faasis, kuid amplituudid võivad neil olla erinevad. Iga sinusoidaalselt võnkuva ainepunkti energia on

$$W = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2,$$

kus  $m$  on võnkuva ainepunkti mass,  $a$  - tema võnkeamplituud ning  $\omega = 2\pi \nu$  - ringsagedus.

Võnkudes püsivas režiimis säilitab laineallikas oma sageduse ja amplituudi, seega ka energia. Niisiis allikast kiirguv võimsus on võrdne selle võimsusega, mis kulutatakse selle laineallika võnkumises hoidmiseks.

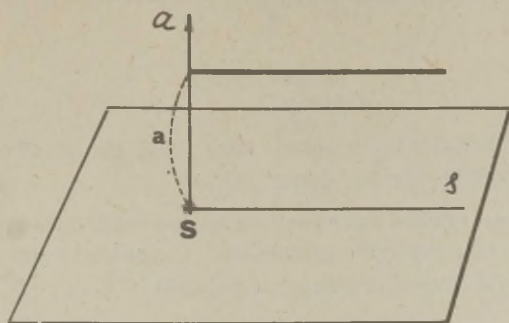
Kui oletada, et laine levides keskkonnas ei esine võnkumiste sumbumist selle keskkonna deformatsiooni või soojenemise tõttu, võib väita, et iga laine viib kaasa nii palju energiat, kui palju allikas seda kiirgab perioodi kestel.

Kui lained levivad homogeenses ja isotroopses keskkonnas, võime vaadelda kolme eri juhtu:

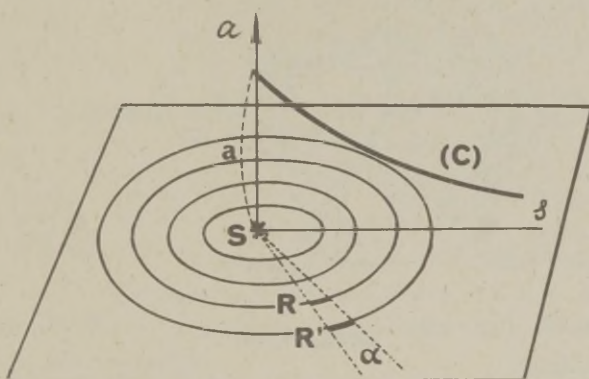
a) Kogu energia levib ühes suunas *SL* (joon. 12.2). Et selles suunas iga pikkusühiku mass on sama, siis võnkumiste amplituud jääb ka samaks mistahes kaugusel allikast:

$$a = \text{const} \quad (12.3)$$

b) Laine levides mööda tasapinda (ringlaine korral) jaotub energia ühtlaselt mööda ringjoont, mille pikkus suureneb kaugenemisega allikast (joon. 12.3). Kahel erineval



Joon. 12:2.



Joon. 12:3.

kaugusel  $R$  ja  $R'$  allikast laine energia

$$W = \kappa a^2 R = \kappa a'^2 R',$$

kus  $\kappa$  on võrdetegur (sama kummagi kauguse korral).

Järelikult



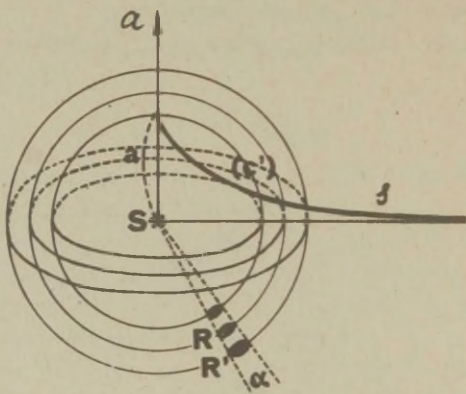
$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{R'}{R}$$

ning

$$a = \frac{\kappa}{\sqrt{R}} \quad (12.4)$$

Hiisiis ringlainete puhul amplitund on pöördvõrdeline ruutjuurega kaugusest laineallikani.

c) Laine levides ruumis jaotub energia ühtlaselt mööda sfääri, mille pindala suureneb kaugenemisega allikast (joon. 12:4). Kahel erineval kaugusel  $R$  ja  $R'$  allikast



Joon. 12:4.

laine energia

$$W = \kappa' a^2 R^2 = \kappa' a'^2 R'^2,$$

kus  $\kappa'$  on konstant (sama mõlema kauguse jaoks). Järelikult

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{R'^2}{R^2}$$

ehk

$$a = \frac{\kappa'}{R}, \quad (12.5)$$

s.o. amplituud on pöördvõrdeline kangusega laineallikast.

#### 12.4. Umovi vektor

Laine front, s.o. punktide geometriiline koht, milleni võnkumine on jõudnud antud ajamomendiks, liigub keskkonnas edasi laine leviniskiirusega  $u$ . Keskkonna võnkuvatel osakestel on kineetiline ja potentsiaalne energia, järelikult võib väita, et keskkonna ruumiühik sisaldab mingi hulga  $\mathcal{E}$  energiat. Joonisel 12:5 tähendab pideva joonega tõmmatud kõver lainefrondi asukohta ajamomendil  $t$  ning punktiirjoonega - ajamomendil  $t + \Delta t$ . Lainefrondi pinnaelementi  $\Delta S$  läbib ajavahemikus  $\Delta t$  energia, mis sisaldub ruumis  $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta \ell$ , s.o.  $\mathcal{E} \Delta V = \mathcal{E} \Delta S u \Delta t$

Läbi ühikulise pinna ajaühikus kanduv energia hulk

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E} \Delta S u \Delta t}{\Delta S \Delta t} = \mathcal{E} u$$

Saadud suurust, mida nimetatakse energiatiheduse vook s, vaadeldakse kui laine levi-

mise suunalist vektorit

$$\vec{\mathcal{J}} = \mathcal{E} \vec{u} \quad (12.6)$$

Et selgitada välja, millised suurused määravad energiatiheduse  $\mathcal{E}$ , vaatleme protsessi väga väikese ajavahemiku  $\Delta t$  kestel, mille korral  $\Delta \ell \ll \lambda$  ( $\lambda$  - laineplikkus). Niisugusel juhul võib arvestada, et ruumalas  $\Delta V$  sisalduvad osakesed läbivad üheaegselt tasakaaluasendi ning sel momendil on nende koguenergia võrdne kineetilise energiaga.

Iga osakese jaoks (massiga  $m$ )

$$W_K = \frac{m v_{\max}^2}{2},$$

$$v_{\max} = a\omega,$$

seega

$$W_K = \frac{m a^2 \omega^2}{2}$$

Tähistame osakeste arvu ruumiühikus  $n_0$ -ga, siis

$$\mathcal{E} = W_K n_0 = \frac{n_0 m a^2 \omega^2}{2}$$

Arvestades, et  $n_0 m = \rho$  on keskkonna tihedus, saame energiatiheduse voo kujul

$$\bar{J} = \frac{\rho}{2} a^2 \omega^2 \bar{u} \quad (12.6')$$

Saadud valem väljendab ajsühikus läbi pindalaühiku kanduvat energiat ning seda nimetatakse Umovi<sup>§</sup> vektoriks.

Häälelainete puhul nimetatakse seda hääletugevuseks.

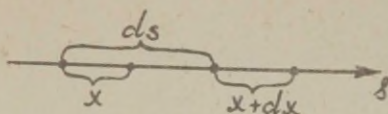
Umovi vektori  $\bar{J}$ -mööduühikuks on  $W m^{-2}$ .

## 12.5. Lainete levimise kiirus keskkonnas

See, millised lained keskkonnas võivad tekkida, kas pik- või ristlained, sõltub keskkonna omadustest. Tekkivate lainete tüübi määravad nihked, mis kutsuvad esile keskkonna elastse deformatsiooni. Keskkonnades, kus on võimalikud vaid kokkusurumise elastsed deformatsioonid (vedelikud, gaasid), tekivad ainult pikilained. Kui keskkonnas on võimalikud ka elastsed nihkedeformatsioonid, saavad selles keskkonnas levida ka ristlained.

Vaatleme ühel sirgel asuvaid keskkonna punkte, mida mööda levib laine, ning võtame selle sirge  $S$ -teljeks (joon. 12:6). Olgu kaks punkti kaugusel  $ds$  teineteisest. Tähistame nende punktide nihked tasakaaluasendist  $x$  ja  $x+dx$ . Seega vahemaa  $ds$  ulatuses on nihe muutunud  $dx$  võrra.

<sup>§</sup> Umov, Nikolai Aleksejevits (1846-1915), vene füüsik.



Joon. 12:6.

Nimetame suhet  $\frac{dx}{ds} = \varepsilon$  suhteliseks deformatsiooniks.

Pikilaine puhul on nihked  $s$  -sihilised. Juhul kui punktidevahelised kaugused suurenevad, on keskkond välja venitatud. Vastasel juhul, kui  $\varepsilon = \frac{dx}{ds} < 0$ , punktidevahelised kaugused vähenevad, on keskkond kokku surutud.

Kasutades lainevõrrandit (12.2)

$$x = a \sin \omega \left( t - \frac{s}{u} \right), \quad (12.7)$$

kus  $\omega$  on ringsagedus ning  $u$  laine levimise kiirus, saame leida seose suhtelise deformatsiooni  $\frac{dx}{ds}$  ja osakes-  
te võnkumise kiiruse  $\frac{dx}{dt}$  vahel.

Tõepoolest, tähistanud tähega  $v$  võnkumise kiiruse, leiame

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) \quad (12.8)$$

Suhteline deformatsioon

$$\varepsilon = \frac{dx}{ds} = -\frac{a\omega}{u} \cos \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) \quad (12.9)$$

Võrreldes avaldusi (12.8) ja (12.9), saame

$$\frac{dx}{dt} = -u \frac{dx}{ds}$$

Siit nähtub, et keskkonna deformatsioon  $\frac{dx}{ds}$  on oma absoluutväärtuse poolest maksimaalne neis kohtades, kus on maksimaalne ka võnkumise kiirus, s.o. kohtades, kus punktid läbivad tasakaaluasendi.

Diferentseerides võrrandit (12.7) kaks korda, saame



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{s}{u}\right)$$

ja

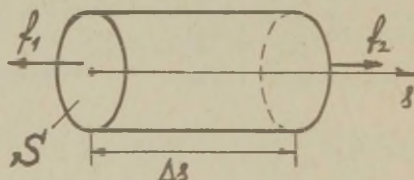
$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{a\omega^2}{u^2} \sin \omega \left(t - \frac{s}{u}\right),$$

kust järgneb:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u^2 \frac{d^2x}{ds^2} \quad (12.10)$$

Võrrandit (12.10) võib nimetada laine diferentsiaalvõrrandiks, mille üheks (kuid mitte ainaks) lahendiks on varem tuletatud lainevõrrand kujul (12.7).

Vaatleme nüüd keakkonna osa, mida piirab silinder pikkusega  $\Delta s$  ning aluse pindalaga  $S$  (joon. 12:7). Olgu



Joon. 12:7.

laine levides suunas  $s$  see piirkond välja venitatud jõudude  $f_1$  ja  $f_2$  mõjul. Kui  $s$ -telje alguspunkt asub silindri vasakpoolsel põhjal, siis selle põhja  $s$ -koordinaat on  $0$  ning parempoolse põhja oma  $\Delta s$ .

Hooke'i seaduse järgi (6.2)

$$f_1 = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{dx}{ds} \right)_0 S,$$

kus  $\alpha$  on keskkonna elastsustegur ning  $\frac{dx}{ds}$  on arvutatud silindri vasakpoolsel põhjal.

Samuti

$$f_2 = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{dx}{ds} \right)_{\Delta s} S$$

Suhtelist deformatsiooni  $\frac{dx}{ds}$  võib vaadelda kui mingit funktsiooni  $F(s)$ , mille võiksime arendada reaks

$$F(s) = F(0) + F'(0)\Delta s + \dots$$

ning piirduda selle rea esimest järku väikeste suurustega

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_{\Delta s} = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \right\} \Delta s$$

Silindrikesele mõjuvate jõudude  $f_1$  ja  $f_2$  resultant

$$\begin{aligned} f &= f_2 - f_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)_{\Delta s} - \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \right\} S = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2x}{ds^2} \Delta s S \end{aligned}$$

Selle jõu mõjul saab vaadeldav keskkonna element kiirenduse  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , mille võime avaldada Newtoni II seaduse järgi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha \rho \Delta s S} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \Delta s S,$$

kus  $\rho$  on keskkonna tihedus.

Niisiis

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha \rho} \frac{d^2x}{ds^2}$$

Kui nüüd kõrvutada äsja saadud seost laine diferentsiaalvõrrandiga (12.10), saame

$$u^2 = \frac{1}{\alpha \rho}$$

ehk

$$u = \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}} \quad (12.11)$$

Saadud valem väljendab pikilainete levimise kiirust elastses keskkonnas.

Eraldi vaadeldud silindrikujulise keskkonna elemendi puhul on  $\alpha = \frac{1}{E}$ , kus  $E$  on keskkonna elastsusmoodul ja

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (12.11')$$

Piiramata keskkonna puhul on  $\alpha$  ja  $E$  vaheline seos keerulisem:

$$\alpha = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)E},$$

kus  $\mu$  on Poissoni tegur, mis arvestab silindrikese külgmist kokkusurumist või väljavenitamist.

Kuna  $\mu \approx \frac{1}{4}$ , siis

$$\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \approx 1$$

ning ligikaudu kehtib siiski seos

$$\alpha \approx \frac{1}{E}$$

Analoogiliselt võib tuletada valemi, mis väljendab ristlainete levimise kiirust elastses keskkonnas

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (12.12)$$

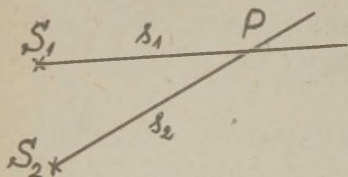
kus  $G$  on nihkemoodul.

## 12.6. Lainete interferents

Kui keskkonnas levib üheaegselt mitu lainet, siis selle keskkonna osakesed võtavad osa mitmest liikumisest korraga, kusjuures kehtib nn. superpositsiooni printsiip, s. o. et iga laine levib olenemata teiste lainete olemasolust. Osakese liikumise määramiseks peab niisugusel juhul leidma selle osakese liikumise igas laines ning siis liitma need liikumised.

Kahe või mitme laine liitumist nimetatakse interferentsiks.

Vaatleme kahe ristlaine liitumist, mille võnkumised on samasihilised ning võrdse sagedusega. Lähtugu need lained allikatest  $S_1$  ja  $S_2$  (joon. 12:8) ning kohtugu punktis  $P$ ,



läbinud vastavalt vahemaad

$$S_1 P = s_1 \quad \text{ja} \quad S_2 P = s_2$$

Olgu allikate  $S_1$  ja  $S_2$  võnkumise seadused

$$S_1: \quad x_1 = a_1 \sin \omega t$$

ning

$$S_2: \quad x_2 = a_2 \sin \omega t$$

Joon. 12:8.

Küsime, milline on punkti  $P$  liikumise seadus. Punktis  $P$  kohtuvad kaks lainet, mille võrrandid selle punkti jaoks on

$$x_1 = a_1 \sin \omega \left( t - \frac{s_1}{u} \right)$$

ning

$$x_2 = a_2 \sin \omega \left( t - \frac{s_2}{u} \right)$$

Punkti  $P$  summaarse liikumise seaduse

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin \omega \left( t - \frac{s_1}{u} \right) + a_2 \sin \omega \left( t - \frac{s_2}{u} \right)$$

saame kujul

$$x = A \sin (\omega t + \varphi_0),$$

kus (11.32):

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos (\varphi_{01} - \varphi_{02})} \quad (12.13)$$

ning (11.33):

$$\tan \varphi_0 = \frac{a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}}{a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}} \quad (12.14)$$

Komponentvõnkumiste algfaasid

$$\varphi_{01} = -\frac{\omega s_1}{u}$$

ja



$$\varphi_{02} = -\frac{\omega S_2}{u}$$

ning faasivahe

$$\varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\omega(S_2 - S_1)}{u} = \frac{2\pi(S_2 - S_1)}{\lambda}$$

Resultantvõnkumiste amplituud on maksimaalne ( $A_{\max} = a_1 + a_2$ ), kui

$$\varphi_{01} - \varphi_{02} = 2\kappa\pi \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots)$$

ehk

$$S_2 - S_1 = \kappa\lambda = 2\kappa\frac{\lambda}{2} \quad (12.15)$$

$A_{\min} = |a_1 - a_2|$  vastab olukorrale, kus

$$\varphi_{01} - \varphi_{02} = (2\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$$

ehk

$$S_2 - S_1 = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (12.16)$$

Seega resultantvõnkumiste amplituud on maksimaalne, kui liituvate lainete käiguvahe on paarisarv ning minimaalne, kui see on paaritu arv poollainepikkusi.

Et interferentsipilt oleks püsiv, on vajalik, et laineallikad  $S_1$  ja  $S_2$  oleksid koherentsed, s.o. et nende võnkumiste faasivahe ei muutuks ajas.

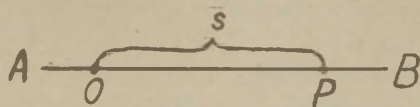
## 12.7. Seisvad lained

Seisvad lained tekivad lainete interferentsi erijuhul, kui kaks ühesugust lainet levivad mööda ühte sirget kahes vastassuunas. Nii tekivad seisvad lained otsese ja tõkkelt peegeldunud laine liitumisel. Sel juhul punktides, kus kahe võnkumise faasivahe on  $2\kappa\pi$  ( $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ ), on võnkumiste amplituud maksimaalne (lähtelaine amplituudi kahekordne) - need on paisukohad; punktides, kus võnkumiste käiguvahe on  $(2\kappa + 1)\pi$  ( $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ ), on amplituud null - sõlmed.

Tekkivat lainet nimetatakse seisvaks sellepärast, et keskkonna iga punkt võngub alati sama amplituudiga ning tekib

mulje, et ei toimu energia edasikandumist (tegelikult kanduvad kummagi laine suunas võrdsed energiahulgad).

Seisva laine võrrandi tuletamiseks vaatleme kahte ühesugust lainet, mis levivad mööda sirget  $AB$  (joon. 12:9)



Joon. 12:9.

kahes vastassuunas. Olgu  $O$  punkt, kus mõlemad võnkumised on samas faasis, ning punktide  $P$  ja  $O$  vaheline kaugus  $S$ . Kirjutame punkti  $P$  jaoks mõlema laine võrrandi

$$A \rightarrow B: \quad x_1 = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{S}{\lambda} \right),$$

$$B \rightarrow A: \quad x_2 = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{S}{\lambda} \right)$$

Punkti  $P$  summaarset liikumist kirjeldab võrrand

$$x = x_1 + x_2 = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{S}{\lambda} \right) + a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{S}{\lambda} \right)$$

ning lõplikult

$$x = 2a \cos \left( 2\pi \frac{S}{\lambda} \right) \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Saadud võrrandis mängib võnkeamplituudi osa avaldis

$$A = 2a \cos \frac{2\pi S}{\lambda}$$

Amplituudi  $A$  väärtuse määrab  $S$  väärtus, seega  $A$  muutub sirge  $AB$  punktist punkti. Määrame nüüd seisva laine paisude ( $A_{\max} = 2a$ ) ja sõlmede ( $A = 0$ ) asukohad.

$A_{\max}$  on punktides, kus

$$\cos \frac{2\pi S}{\lambda} = \pm 1$$

ehk

$$\frac{2\pi S}{\lambda} = 2\kappa \frac{\pi}{2} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots),$$

kust

$$S = K \frac{\lambda}{2}$$

Paisud asuvad niisiis punktist 0 kaugustel  $\frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots$ , s.o. kahe naaberpaisu vahemaa on  $\frac{\lambda}{2}$  (punktis 0 on ka muidugi pais).

$A_{min}$  on punktides, kus

$$\cos \frac{2\pi S}{\lambda} = 0$$

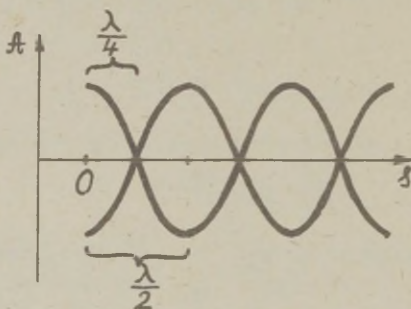
ehk

$$\frac{2\pi S}{\lambda} = (2K+1) \frac{\pi}{2}, \quad (K=0,1,2,\dots),$$

kust

$$S = (2K+1) \frac{\lambda}{4}$$

Seega asuvad sõlmed punktist 0 kaugustel  $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ . Kahe naabersõlme vahemaa on samuti  $\frac{\lambda}{2}$ . Seisvat lainet kujutab joonis 12:10.



Joon. 12:10.

### Ülesanne 12-1.

$L = 25\text{ m}$  pikkuse nööri üks otspunkt  $A$  võngub seaduse järgi:

$$y = 3 \sin(125,6 t + \frac{\pi}{3})$$

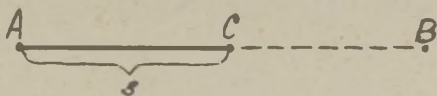
(cm)                      (s)

ning on teada, et ristlaine jõuab nööri teise otsa B  $\tau = 2,5$  sekundiga.

a) Milline on lainepikkus?

b) Määrata ajamomendil  $t_1 = 2\text{ s}$  allikast  $S = 3,5\text{ m}$  kaugusel oleva nööripunkti C hälve ja kiirus, jättes arvestamata sumbumise ja peegeldunud laine mõju.

Lahendus (joon. 12:11).



Joon. 12:11.

a) Teades laine levimise ulatust ( $L = 25\text{ m}$ ) ning aega ( $\tau = 2,5\text{ s}$ ), leiame laine levimise kiiruse

$$u = \frac{L}{\tau}$$

Võnkumiste sagedus

$$\nu = \frac{125,6}{2\pi} \text{ s}^{-1}$$

ning lainepikkus

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{25\text{ m} \cdot 2\pi}{2,5\text{ s} \cdot 125,6 \text{ s}^{-1}} = \underline{\underline{0,5\text{ m}}}$$

b) Punkti A võnkumise seaduseks on

$$y = 3 \sin(125,6 t + \frac{\pi}{3})$$

punkti C jaoks, mis hilineb selle suhtes  $\frac{S}{u}$  võrra, saame

$$y = 3 \sin[125,6(t - \frac{S}{u}) + \frac{\pi}{3}],$$



S.O.

$$\begin{aligned}
 y &= 3 \text{ cm} \cdot \sin \left[ 40\pi \text{ s}^{-1} \left( 2\text{s} - \frac{3,5 \text{ m}}{10 \text{ m s}^{-1}} \right) + \frac{\pi}{3} \right] = \\
 &= 3 \text{ cm} \sin \left( 40\pi \cdot 1,65 + \frac{\pi}{3} \right) = \\
 &= 3 \text{ cm} \sin \left( 66\pi + \frac{\pi}{3} \right) = 3 \text{ cm} \sin \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{2,6 \text{ cm}}}
 \end{aligned}$$

Punkti C kiirus

$$\begin{aligned}
 v = \frac{dy}{dt} &= 3 \text{ cm} \cdot 125,6 \text{ s}^{-1} \cos \left[ 125,6 \left( t - \frac{s}{u} \right) + \frac{\pi}{3} \right] = \\
 &= 3 \text{ cm} \cdot 125,6 \text{ s}^{-1} \cos \frac{\pi}{3} = 190 \text{ cm s}^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{v = 1,90 \text{ m s}^{-1}}}$$

### Ülesanne 12-2.

Helihark, mille sagedus  $\nu = 200 \text{ Hz}$ , võngub püsivas režiimis ning puudutab tema harude külge kinnitatud kahe teravikuga  $S'$  ja  $S''$  elavhõbeda pinda. Teravikevaheline kaugus  $d = 4,8 \text{ cm}$ , nende võnkesamplituud  $a = 2 \text{ mm}$  ning lainete levimise kiirus elavhõbeda pinnal  $u = 1,2 \text{ m s}^{-1}$ .

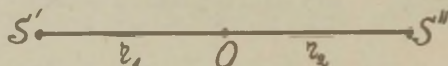
Määrata:

- lõigu  $S'S''$  keskpunkti  $O$  võnkumiste amplituud,
- punkti  $P$  hälbed ajamomentidel  $t_1 = 2\text{s}$  ja  $t_2 = 2,032\text{s}$ , kui punkt  $P$  asub sirgel  $S'S''$  kaugusel  $z_1 = 1,6 \text{ cm}$  allikast  $S'$ , teades, et ajamomendil null kummagi allika hälbed on nullid ning  $S'$  ja  $S''$  liiguvad mõlemad ülespoole.

- Mitu interferentsriba tekib punktide  $S'$  ja  $S''$  vahel?

### Lahendus.

a)

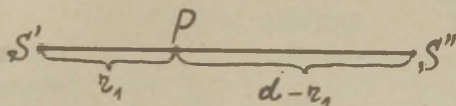


Joon. 12:12.

Punktis  $O$  :  $r_1 - r_2 = 0$ ,  
järelikutl amplituud

$$A = 2a = \underline{\underline{4 \text{ mm}}}$$

b)



Joon. 12:13.

Kummastki laineallikast punkti  $P$  saabuvate lainete võrrandid on (12.2)

$$x_1 = a \sin 2\pi \nu \left( t - \frac{r_1}{u} \right),$$

$$x_2 = a \sin 2\pi \nu \left( t - \frac{d - r_1}{u} \right)$$

Kummagi võnkumise algfaasid on

$$\varphi_{01} = -2\pi \nu \frac{r_1}{u} = -\frac{160\pi}{3},$$

$$\varphi_{02} = -2\pi \nu \frac{d - r_1}{u} = -\frac{320\pi}{3}$$

Seega

$$\varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{160\pi}{3}$$

ning võnkumiste amplituud (11.32)

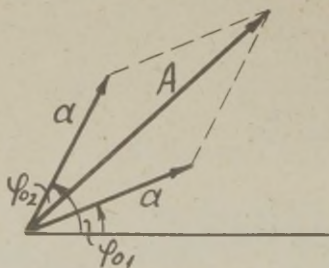
$$A_P = \sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})} = \underline{\underline{2 \text{ mm}}}$$

Punkti  $P$  võnkumiste algfaas (joon. 12:14)

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2} = -80\pi$$

Seega punkti  $P$  võnkumiste võrrand on

$$x = \underset{(mm)}{2} \sin \left( \underset{(s)}{400\pi t} - 80\pi \right)$$



Joon. 12:14.

Ajamomendil  $t_1 = 2\delta$  on

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}$$

Ajamomendil  $t_2 = 2,032\delta$

saame  $\underline{\underline{x_2 = 1,08\text{ mm}}}$

c) Laineallikate  $S'$  ja  $S''$  vahel tekivad seisvad lained, mille paisude (sõlmede) vahekaugus on  $\frac{\lambda}{2}$ .

Seega interferentsribade arv

$$n = \frac{d}{\frac{\lambda}{2}} - 1 = \frac{2d\gamma}{u} - 1 =$$

$$= \frac{2 \cdot 4,8\text{ cm} \cdot 200\text{ s}^{-1}}{120\text{ cm s}^{-1}} - 1 = \underline{\underline{15}}$$

### 13. AKUSTIKA ELEMENTE

Akustika käsitleb kõrvaga kuuldavaid nähtusi, hääli, s. o. võnkumisi, mille sagedused asuvad vahemikus 16 - 20 000 Hz ning mis levivad elastsetes keskkondades pikilainetena.

Hääleallikaks võib olla iga võnkuv keha, kui tema võnkesagedus asub kuuldavuse piirides ning kui tal on küllaldane kokkupuutepind teda ümbritseva keskkonnaga, et selles tekiksid märgatava intensiivsusega lained, mis, saabunud inimese kõrva, põhjustaksid kuulmisaistingut.

Hääl levib igas elastses keskkonnas pikilainetena, mille levimiskiirus on määratud keskkonna elastsete omadustega (12.11)

$$u = \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}},$$

kus  $\alpha$  on keskkonna elastsustegur,  
 $\rho$  - keskkonna tihedus.

Kui pikilained (häälelained) levivad gaasis (õhus), siis peaksime elastset deformatsiooni (paisumist, kokkusurumist) kirjeldama võrrandiga

$$dp = -\alpha \frac{dV}{V},$$

kus  $p$  on gaasi rõhk ning  
 $V$  - ruumala.

Et laine levimise protsess on adiabaatiline ning käitub Poissoni võrrandi järgi, siis



$$pV^{\alpha} = \text{const}, \quad (13.1)$$

kus  $\alpha$  on gaasi erisoojuste suhe ( $\alpha = \frac{C_p}{C_v}$ ).

Võrrandi (13.1) diferentseerimise tulemusena saame

$$dp = -\frac{\alpha p}{V} dV$$

Seega

$$\alpha = \alpha_p$$

ning pikilained levivad gaasis kiirusega

$$u = \sqrt{\frac{\alpha p}{\rho}} \quad (13.2)$$

### 13.1. Doppleri efekt

Eksperiment näitab, et iga kord, kui heliallikas ja vastuvõtja liiguvad teineteise suhtes (lähenevad või kaugenevad), on vastuvõetud heli vastavalt suurema või väiksema sagedusega kui see, mille heliallikas välja saadab. Seda nähtust tuntakse Doppleri<sup>xx</sup> efekti nime all, kes nähtust teoreetiliselt põhjendas.

Liikugu heliallikas  $A$ , mille võnkeperiood on  $T$ , ja vastuvõtja  $K$  (kõrv), mööda sirget  $MN$  (joon. 13:1) ning olgu nende kiirused vastavalt  $v$  ja  $v'$ . Olgu ajamomendil  $t_0 = 0$  allikas punktis  $A$ . Sellel momendil allikast väljasaadetud helilaine levib sirge  $MN$  suunas ning ajamomendil  $t$  jõuab vastuvõtjani, mis sel momendil on punktis  $K$  (lainefront  $S$ ).

Seega  $AK = ut$  ( $u$  tähistab hääle levimise kiirust).

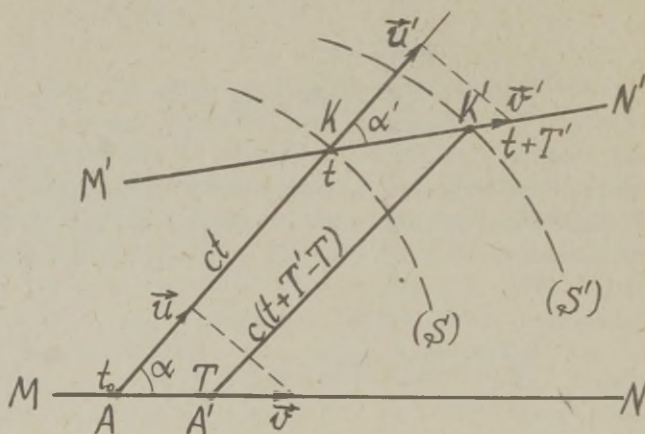
Perioodi  $T$  võrra hiljem on heliallikas punktis  $A'$  ( $AA' = vT$ ) ning saadab välja järgmise laine. Vastuvõtja, liikudes ise kiirusega  $v'$ , võtab selle laine vastu aja-

<sup>xx</sup> Doppler, Christin (1803-1853), austria füüsik ja matemaatik.



Saadud seos on väga üldine, ta on rakendatav kõigil võimalikel juhtudel tingimusel, et  $v$  ja  $v'$  algebralised väärtused on võetud, lugedes positiivseks suunaks heli levimise suuna (heliallikalt vastuvõtja poole). Sel tingimusel on  $u$  alati positiivne.

Tuletatud seosed (13.3) ja 13.3') kehtivad ka sel juhul, kui heliallika ja vastuvõtja liikumise sihid ei ühti. Niisugust olukorda kirjeldab joonis 13:2, kus heliallikas liigub mööda sirget  $MN$  ning vastuvõtja mööda sirget  $M'N'$ .



Joonis 13:2.

Jooniselt 13:2 loeme

$$\vec{AK} = \vec{AA'} + \vec{A'K'} + \vec{K'T'K}$$

Oletame, et vastuvõtja on allikast küllalt kaugel ning et kiirused  $v$  ja  $v'$  on helikiirusega võrreldes küllalt väikesed, see tähendab, et tee lõigud  $v'T'$  ja  $vT$  on palju lühemad kui  $ut$ . Niisugusel juhul moodustavad  $AK$  ja  $A'K'$  väga väikese nurga ning neid võib lugeda paralleelseteks. Seega



$$ut = vT \cos \alpha + u(t + T' - T) - v'T' \cos \alpha'$$

Tähistanud kiiruste  $\vec{v}$  ja  $\vec{v}'$  projektsioonid  $\mathcal{A}\mathcal{K}$  suunale  $w$  ja  $w'$ :

$$v \cos \alpha = w,$$

$$v' \cos \alpha' = w',$$

sasme

$$T'(u - w') = T(u - w), \quad (13.4)$$

s.o. varem tuletatud seose (13.3), kus tegelikud kiirused  $\vec{v}$  ja  $\vec{v}'$  on asendatud radiaalsete kiirustega  $w$  ja  $w'$ , mille algebralised väärtused peab võtma samal tingimusel, s.o. lugedes positiivseks suunda allikas - vastuvõtja.

Võrreldes valemeid (13.3) ja (13.4) peab tegema veel ühe olulise märkuse.

Valem (13.3) määrab helisageduse muutuse mistahes  $v$  ja  $v'$  väärtuste korral. Kui  $\vec{v}$  ja  $\vec{v}'$  on ajas muutumatud suurused (kumbki liikumine ühtlane sirgliikumine), on sageduste suhe  $v'/v$  samuti konstantne, s.o. vastuvõtja "kuuleb" pidevalt sama kõrgusega heli.

Teisel juhul määrab valem (13.4) sageduste suhte  $v'/v$  igal ajamomendil. Et aga  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{K}$  trajektoorid on erinevad, siis suhe  $v'/v$  muutub ajas ka sel juhul, kui mõlemad liikumised on ühtlased sirgliikumised ( $v$  ja  $v'$  konstantssed); vastuvõtja "kuuleb" ajas muutuva kõrgusega heli.

## 13.2. Hääle tajumine

Kõrvaga kuuldavad võnkumised (hääled) jagunevad müradeks ja helideks. Müra põhjustavad võnkumised, mille sagedus, amplituud ja faas kiiresti ning korrapäraselt muutuvad. Helide puhul on tegemist korrapärase perioodiliste võnkumistega. Harmooniline võnkumine annab lühtheli ehk tooni.



Selleks et heli oleks kuuldav, ei piisa tema kuuluvusest sageduste vahemikku  $16-20000\text{ Hz}$ ; ta peab olema veel küllalt tugev, s.o. tema intensiivsus (tugevus) peab ületama teatud miinimumi (ärritusläve), mille väärtus sõltub sagedusest. Eksperiment näitab, et inimekõrv on kõige tundlikum sagedustele  $1000-3000\text{ Hz}$ , ning on teada, et  $1000\text{ Hz}$  puhul, mis on võetud normaalsageduseks, on lävi  $I_0 = 10^{-12}\text{ Wm}^{-2}$ . Peale tugevuse miinimumväärtuse piirab kuuldavuse piirkonda ülevalt poolt selle maksimumväärtus (normaalsagedusel  $1000\text{ Hz}$   $I_{\max} = 10\text{ Wm}^{-2}$ ), millest tugevamad hääled teevad kõrvale haiget ning pole enam tajutavad häälena. Seega tajub kõrv hääli, mille tugevused võivad erineda kuni  $10^{13}$  korda.

Kõrv eraldab helisid kõrguse, tämbri ja valjuse järgi. Heli kõrguse määrab tema põhitooni sagedus, sellega kaasnevad ületoonid (näiteks muusikariistade puhul põhitooni täiskordsed) määravad heli tämbri ehk kõla ning valjus on subjektiivselt tajutav hääle tugevus ehk intensiivsus. Hääle tugevust mõõdetakse logaritmilise skaala abil, sest Weberi-Fechneri seaduse kohaselt t a j u b i n i m e n e h ä ä l e t u g e v u s t v ö r d e l i s e l t e n e r g i a l o g a r i t m i g a, s.o. v ö r d e l i s e l t t u g e v u s e l o g a r i t m i g a. Kasutades hääle tugevuse mõõduks logaritmilist skaalat, saame hääle valjuse mõõduks lineaarse skaala, selle mõõtühikuks on detsibell  $dB$ , mis määratakse normaalsageduse korral valemiga

$$K = 10 \log \frac{I}{I_0}, \quad (13.5)$$

kus  $K$  on hääle valjus detsibellides,

$I$  - määratava hääle tugevus,

$I_0$  - kuuldavuse lävele vastav hääle tugevus.

Seega on kuuldavuse ulatus  $130\text{ dB}$  normaalsagedusel.

Suvalise sagedusega hääle valjust võrreldakse normaaltooni valjusega ning juhul, kui need valjused on kõrvale võrdsed, on selle hääle valjus, avaldatud foonides, arvuliselt võrdne normaaltooni valjusega detsibellides.

### 13.3. Keelte võnkumine

Keeleks nimetatakse kahe kinnituspunkti vahele pinguletõmmatud ühtlase ristlõikega elastset keha, mille pikkus on palju suurem tema ristlõike mõõtudest (kõige sagedamini peenike metallniit - traat).

Kui pingutatud keele üks punkt viia välja tasakaaluasendist, siis ta hakkab võnkuma ning mööda keelt levib ristlaine. Selle laine peegeldumisel traadi otspunktidelt tekivad ühesugused vastassuunalised lained ja nende liitumise tulemuseks on seisvad lained, mille sõlmed peaksid asuma kaugusel  $\frac{\lambda}{2}$  üksteisest iga sageduse korral. Kuid tegelikult see nii ei ole, sest igal pingutatud keelel on kaks kindlaksmääratud sõlme - need on tema kinnitatud otspunktid. Seepärast osutub võimalikuks ainult niisuguste korrapäraste seisvate lainete tekkimine, mis rahuldavad tingimust

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad (13.6)$$

kus  $L$  on keele pikkus,

$n$  - mingi täisarv (1, 2, 3 ...).

Tähistanud laine levimise kiiruse keeles tähega  $u$  ning võnkumiste sageduse tähega  $\nu$ , võime kirjutada

$$\lambda = \frac{u}{\nu}$$

ning

$$L = n \frac{u}{2\nu},$$

kust

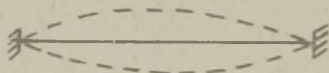
$$\nu = n \frac{u}{2L} \quad (13.7)$$

Saadud valem määrab kõik sagedused, mille puhul keeles tekivad korrapärased seisvad lained.

Kui  $n = 1$  , saame nn. põhisageduse (esimese harmoonilise)

$$\nu_0 = \frac{u}{2L},$$

mille korral keeles tekib ühe paisuga seisev laine (joon. 13:3).

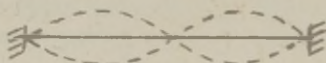


Joon. 13:3.

Kui  $n = 2$  , tekib kahe paisuga seisev laine - teine harmooniline (joon. 13:4) sagedusega

$$\nu = 2 \frac{u}{2L} = 2\nu_0$$

jne.



Joon. 13:4.

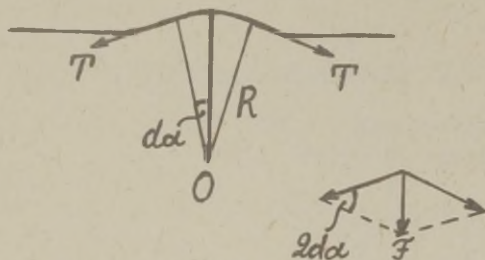
Keeles tekkivad korrapärased seisvad lained kujutavad endast selle keele mitmesuguseid omavõnkumisi, mille sagedused on selle keele omavõnkesagedused.

Sagedustel, mis ei rahulda seost  $\nu = \frac{u}{2L}$  , korrapäraseid seisvaid laineid ei teki.

Analoogiliselt keeltega võivad tekkida seisvad lained ka mitmesugustes membraanides, plaatides, varrastes, kellades, õhusammastes jms. Kõikidel juhtudel on need antud keha omavõnkumised.

#### 13.4. Laine levimise kiirus keeles

Laine levimisel mööda keelt liigub selle laine hari mööda keelt kiirusega  $u$  (joon. 13:5). Seda protsessi võib



Joon. 13:5.

vaadelda kui vastupidist, s.o. keele liikumist kiirusega  $u$  läbi laineharjale vastava kõveruse lainele vastassuunas.

Olgu keele joontihedus  $\mu$ , teda pingutav jõud  $T$ , laineharja kõverusraadius  $R$ . Niisugusel juhul keele element pikkusega  $ds$  ning massiga  $dm = \mu ds$  liigub kiirusega  $u$  mööda kaart raadiusega  $R$ . Selleks vajalik tsentripetaaljõud

$$F = \frac{dm u^2}{R}$$

Selle jõu  $F$  tekitab keelt pingutav jõud  $T$  :

$$F = 2T \sin(d\alpha) \approx 2T d\alpha$$

Niisiis

$$\frac{\mu R 2d\alpha u^2}{R} = 2T d\alpha$$

ning

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (13.8)$$



s.o. laine levimise kiirus keeles on võrdeline ruutjuurega keelt pingutavast jõust ning pöördvõrdeline ruutjuurega tema joontihedusest.

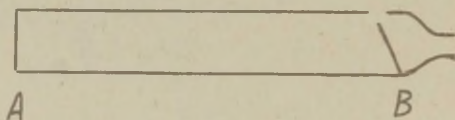
Valemist (13.7) saab arvutada ka keele omavõnkesagedused

$$\gamma = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (13.9)$$

kus  $n$  on endiselt mingi täisarv:  $n = 1, 2, 3 \dots$

### 13.5. Õhusammaste võnkumine viledes

Viled jagunevad kahte liiki: kinnise otsaga (kinnised) ja lahtise otsaga (lahtised) torud.

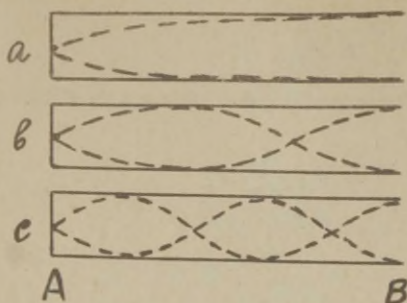


Joon. 13:6.

1) Kui kinnise põhjaga toru otsa paigutada mingi võnkuv keha (joonisel 13:6 on toru otsas  $B$  selleks flöödi huu-lik), levivad pikilained mööda toru kuni selle põhjani  $A$  ning peegelduvad sealt tagasi. Nii tekivad torus seisvad lained, kusjuures toru põhjas  $A$  on alati sõlm ning lahtises otsas  $B$  pais. Joonisel 13:7 on kujutatud kolm konkreetset seisvat lainet, nendest esimene (a) määrab nn. põhi-ooni, mille lainepikkus  $\lambda_0 = 4L$ , kus  $L$  tähistab toru pikkust. Tekkiva heli põhisagedus on siis

$$\gamma_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{4L}, \quad (13.10)$$

kus  $c$  on hääle levimise kiirus. (b) ja (c) kujutavad kahe ülemtooni tekkimise juhtu, helisagedused on siin vastavalt



Joon. 13:7.

(b):  $\nu_1 = 3\nu_0,$

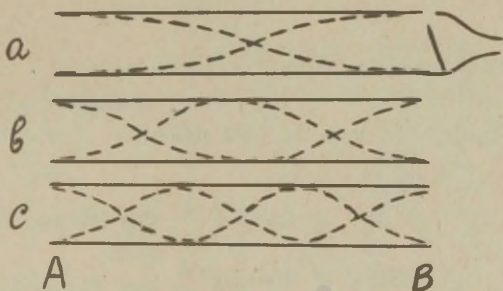
(c):  $\nu_2 = 5\nu_0$

Üldkuul

$$\nu = (2k+1)\nu_0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.11)$$

Nii tekib vastava tämbriga heli, mille kõrguse määrab  $\nu_0$ .

2) Lahtises torus tekkivad seisvad lained on kujutatud joonisel 13:8, kus laine  $a$  pikkusega  $\lambda_0 = 2L$  määrab



Joon. 13:8.

põhitooni sagedusega

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2d} \quad (13.12)$$

ning (b) ja (c) kujutavad kahe võimaliku ülemtoonide tekimist:

$$(b): \quad \nu_1 = 2 \nu_0,$$

$$(c): \quad \nu_2 = 3 \nu_0$$

ehk üldkujul

$$\nu = k \nu_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.13)$$

### Ülesanne 13-1.

Häälained levivad hapnikus normaaltingimustes kiirusega  $u_0 = 317 \text{ m s}^{-1}$ . Määrata nendest andmetest hapniku erisoojuste suhe  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

### Lahendus.

Hääle (pikilainete) levimise kiirus gaasis normaaltingimustes (13.2):

$$u_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

kus

$$p_0 = 760 \text{ mm Hg} = \delta g h_0,$$

$$\delta = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} - \text{elavhõbeda tihedus,}$$

$$h_0 = 760 \text{ mm} = 0,76 \text{ m,}$$

$$\rho_0 = \frac{\mu}{\omega_0},$$

$$\mu = 32 \text{ kg} \cdot \text{kmool}^{-1} - \text{ühe kilomooli hapniku mass,}$$

$$\omega_0 = 22,4 \text{ m}^3 \cdot \text{kmool}^{-1} - \text{ühe kilomooli gaasi ruumala normaaltingimustes.}$$

Seega

$$u_0 = \sqrt{\frac{x \delta g h_0 \omega_0}{\mu}},$$

siit

$$\begin{aligned} x &= \frac{u_0^2 \mu}{\delta g h_0 \omega_0} = \\ &= \frac{317^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \cdot 32 \text{ kg kmool}^{-1}}{13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,76 \text{ m} \cdot 22,4 \text{ m}^3 \text{ kmool}^{-1}} = \\ &= \underline{\underline{1,42}} \end{aligned}$$

### Ülesanne 13-2.

a) Kui pika aja jooksul levib pikilaine  $L = 30 \text{ m}$  pikku-se koridori ühest otsast teise, kui koridor on täidetud kuiva õhuga normaaltingimustes ( $p_0 = 1 \text{ At}$ ,  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ )?

b) Kuidas muutub vastus, kui tõsta koridoris oleva õhu temperatuuri  $\Delta t = 2 \text{ K}$  võrra?

### Lehendus.

a) Pikilained levivad gaasis kiirusega (13.2):

$$u = \sqrt{\frac{x p}{\rho}}$$

Antud juhul on tegemist kahe kaheaatomilise gaasi seguga:

$\text{N}_2$  ja  $\text{O}_2$  (teised komponendid esinevad tähtsusetult väikestes hulkades), seega on molekulide vabadusastmete arv  $i = 5$  ning

$$x = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} = 1,4$$

Õhu rõhk

$$p = p_0 = \delta g h_0,$$

kus elavhõbeda tihedus  $\delta = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  
elavhõbedasamba kõrgus  $h_0 = 0,76 \text{ m}$ .



Õhu tihedus  $\rho = \rho_0 = \frac{M}{\omega_0}$ , kus ühe "kilomooli" õhu mass  
 $M = 28,8 \text{ kg kmool}^{-1}$  (arvutatud lähtudes lämmastiku ja  
 hapniku vahekorra 4:1 õhus),

ühe kilomooli gaasi ruumala normaaltingimustes

$$\omega_0 = 22,4 \text{ m}^3 \text{ kmool}^{-1}$$

Seega hääle levimise kiirus õhus normaaltingimustes

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt{\frac{\alpha p_0}{\rho_0}}, \\ u_0 &= \sqrt{\frac{\alpha \delta g h_0 \omega_0}{M}} = \\ &= \sqrt{\frac{1,4 \cdot 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,76 \text{ m} \cdot 22,4 \text{ m}^3 \text{ kmool}^{-1}}{28,8 \text{ kg kmool}^{-1}}} = \\ &= \underline{\underline{332 \text{ m s}^{-1}}} \end{aligned}$$

Laine levimise aeg koridoris

$$t_0 = \frac{L}{u_0} = \frac{30 \text{ m}}{332 \text{ m s}^{-1}} = \underline{\underline{0,0905 \text{ s}}}$$

b) Temperatuuril  $t^\circ\text{C}$  on õhu tihedus ( $\rho = \text{const}$ ):

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha t},$$

kus

$$\alpha = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$$

Seega

$$u = \sqrt{\frac{\alpha p_0 (1 + \alpha t)}{\rho_0}} = u_0 \sqrt{1 + \alpha t}$$

Laine levimise aeg

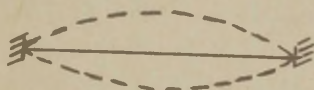
$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 + \alpha t}} = \underline{\underline{0,0902 \text{ s}}}$$

Niisiis väheneb laine levimise aeg  $3 \cdot 10^{-4}$  s võrra.

### Ülesanne 13-3.

$\ell = 2 \text{ m}$  pikkuse keele, mille joontihedus  $\mu = 1,5 \text{ g cm}^{-1}$ ,  
põhisagedus  $\nu_0 = 2 \text{ s}^{-1}$ . Määrata keelt pingutav jõud  $T$ .

#### Lahendus.



Joon. 13:9.

Keele põhisagedus vastab selle võnkumisele ühe paisuga (joon. 13:9), seega on lainepikkus

$$\lambda_0 = 2\ell$$

Laine levimise kiirus keeles

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Seega seosest

$$u = \lambda \nu$$

saame

$$\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2\ell \nu_0,$$

$$T = 4\ell^2 \nu_0^2 \mu =$$

$$= 4 \cdot 4 \text{ m}^2 \cdot 4 \text{ s}^{-2} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-1} = \underline{\underline{9,6 \text{ N}}}$$

### Ülesanne 13-4.

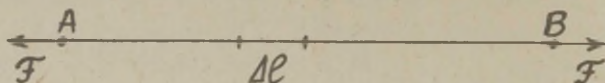
Terastraat  $AB$  pikkusega  $L = 20 \text{ m}$  ning läbimõõduga  $d = 0,5 \text{ mm}$  on pingutatud jõuga  $T = 10 \text{ kG}$ .

a) Kui pika aja jooksul levib ristlaine traadi ühest otsast teise?

b) Kui traadi otspunkt  $A$  on ristlainete allikaks sagedusega  $\nu = 2 \text{ Hz}$ , milline on siis traadis leviva laine pikkus?

c) Millise väärtuse peab saama sagedus, et kaks traadi punkti vahemaaga  $\Delta \ell = 2 \text{ m}$  võnguksid vastasfaasides?

Lahendus (joon. 13:10).



Joon. 13:10.

a) Ristlaine levimise kiirus pingutatud traadis

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

kus traadi joontihedus

$$\mu = \frac{\pi d^2}{4} \rho$$

(terase tihedus  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ).

Laine levimise aeg traadi ulatuses

$$\begin{aligned} t &= \frac{L}{u} = L \sqrt{\frac{\mu}{T}} = \frac{Ld}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho}{T}} = \\ &= \frac{20 \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \sqrt{\pi \cdot 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}}{2 \sqrt{10,98 \text{ N}}} = \underline{\underline{0,079 \text{ s}}} \end{aligned}$$

b) Lainepikkus

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{L}{t\nu} = \frac{20 \text{ m}}{0,079 \text{ s} \cdot 2 \text{ s}^{-1}} = \underline{\underline{127 \text{ m}}}$$

c) Tingimuseks, et kaugusel  $\Delta l = 2 \text{ m}$  üksteisest asuvad punktid võnguvad vastasfaasides, on

$$n \frac{\lambda}{2} = \Delta l$$

kus  $n = 1, 2, 3, \dots$

Siit järgneb

$$v = n \frac{u}{\lambda} = n \frac{L}{t 2\Delta l} =$$

$$= \frac{n \cdot 20m}{0,0795 \cdot 4m} = \underline{\underline{n \cdot 63,5 \text{ Hz}}}$$

### Ülesanne 13-5.

Kahest otsast kinnitatud  $\ell = 1,5m$  pikkuses pingutatud terastraadis tekitatakse elektromagneti abil, mis paikneb  $\frac{\ell}{3}$  kaugusel traadi ühest otsast ning avaldab traadile  $\gamma = 100^{\circ}$  tõmmet sekundis,  $n = 3$  paisuga seisev laine.

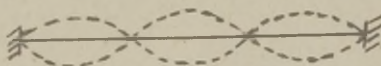
a) Määrata traadi pinget, kui tema läbimõõt  $d = 0,25mm$ .

b) Sagedust suurendatakse  $1\%$  võrra. Kuidas peab muutma traadi pikkust, et taastada eelmine olukord?

c) Kõrvaldanud elektromagneti, puudutatakse traati kergelt tema keskpunktis. Milline on nüüd madalaim võimalik võnkesagedus?

### Lahendus.

a)



Joon. 13:11.

Seisva laine pikkus

$$\lambda = \frac{2\ell}{3}$$

laine levimise kiirus traadis (13.8)

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

ning traadi joontihedus

$$\mu = \frac{\pi d^2 \rho}{4},$$

kus terase tihedus  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

Et  $u = \lambda \nu$ , siis



$$\lambda v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

ning

$$T = \frac{\pi d^2 \rho \ell^2 v^2}{9}$$

Pinge traadis

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{T}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \rho \ell^2 v^2}{9} = \\ &= \frac{4 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 10^4 \text{ s}^{-2}}{9} = \underline{\underline{7,8 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-2}}} \end{aligned}$$

b) Uus sagedus

$$v' = v(1 + 0,001)$$

Ülejäänud tingimused jäävad endisteks, s.o.

$$T' = T, \quad n' = n, \quad u' = u,$$

järelikult

$$\lambda' v' = \lambda v$$

Et  $\lambda' = \frac{2\ell'}{3}$ , siis

$$v' \frac{2\ell'}{3} = v \frac{2\ell}{3},$$

kust

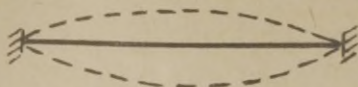
$$v'\ell' = v\ell$$

ning

$$\ell' = \frac{v\ell}{v'} = \frac{v\ell}{v(1+0,001)} = \ell(1-0,001)$$

Niisils tuleb traadi pikkust vähendada 1‰ võrra.

c)



Joon. 13:12.

Seisva laine pikkus on nüüd

$$\lambda'' = 2\ell$$

ning põhisagedus

$$\begin{aligned} \nu'' &= \frac{u}{\lambda''} = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{T \cdot 4}{\pi d^2 \rho}} = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 1,5 \text{ m}} \sqrt{\frac{7,8 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}}{7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}} = \underline{\underline{33,3 \text{ Hz}}} \end{aligned}$$

Kasutatud kirjendus

- Faucher, R. Physique I et II. Paris, 1961.
- Hajko, V. Physik in Beispielen. Leipzig, 1969.
- Lang, J., Marran, H., Mitt, A., Mürk, H., Pae, A. Füüsika üldkursus I. Tallinn, 1959.
- Lindner, H. Physikalische Aufgaben. Leipzig, 1961.
- Арцыбышев С.А. Курс физики, ч. I. М., 1951.
- Савельев И.В. Курс общей физики I. М., 1962.
- Сахаров Л.И. Сборник задач по физике, М., 1963.
- Стрелков С.П. Эльцин И.А., Яковлев И.А., Сборник задач по общему курсу физики, ч. I. М., 1964.
- Фриш С.Э. и Тиморева А.В. Курс общей физики I. М.-Л., 1949.
- Хайкин С.Э. Физические основы механики. М., 1963.

## Sisukord

1. AINEPUNKTI KINEMAATIKA .....	3
1.1. Sirgliikumine .....	6
1.2. Kõverliikumine .....	10
1.3. Ringliikumine .....	16
Ülesandeid .....	19
2. AINEPUNKTI DÜNAAMIKA .....	25
2.1. Dünaamika põhiseadused .....	25
2.2. Kehade liikumine seoste korral .....	28
2.3. Liikumishulga jäävuse seadus .....	34
2.4. Muutliku massiga keha liikumine .....	38
Ülesandeid .....	41
3. TÖÖ. ENERGIA .....	52
3.1. Töö .....	52
3.2. Energia .....	54
3.3. Energia jäävuse seadus mehaanikas ....	58
3.4. Potentsiaalne energia ja jõud .....	60
3.5. Mehaanilise süsteemi tasakaalutingimu- sed .....	61
Ülesandeid .....	62
4. PÕRGE .....	67
4.1. Kahe mitteelastse keha põrge .....	67
4.2. Mitteelastse keha põrge risti vastu liikumatud mitteelastset seina .....	68
4.3. Elastse kuuli põrge vastu elastset seina .....	69
4.4. Kahe elastse kuuli tsentraalne põrge..	70
Ülesandeid .....	72



5. GRAVITATSIOON .....	75
5.1. Gravitatsiooniseadus .....	75
5.2. Kepleri seadused .....	79
5.3. Gravitatsiooniväli .....	81
5.4. Esimene ja teine kosmiline kiirus ...	84
Ülesandeid .....	86
6. ELASTSUSJÕUD .....	92
6.1. Deformatsioonid ja pinged	
tahketes kehaades .....	92
6.2. Elastne venituse ja kokkusurumine ....	93
6.3. Elastne nihe .....	95
7. HÕÖRDEJÕUD .....	99
7.1. Kuiv hõõre .....	99
7.2. Viskoosne hõõre .....	101
8. LIIKUMINE MITTEINERTSIAALSETES	
SÜSTEEMIDES .....	103
8.1. Inertsijõud kulgevas süsteemis .....	103
8.2. Inertsijõud pöörlevas süsteemis .....	105
8.3. Kehade liikumisest Maa peal .....	110
9. AINEPUNKTIDE SÜSTEEMI JA KINDLA KEHA	
DÜNAAMIKA .....	117
9.1. Masskese .....	117
9.2. Pöörlemise kineetika .....	120
9.3. Pöörleva keha kineetiline energia ...	122
9.4. Kehade inertsimomente .....	123
9.5. Pöörlemise dünaamika põhivõrrand ....	128
9.6. Liikumishulga momendi (pöörlemishulga) järelepanu seadus .....	131
9.7. Gýroskoopiline efekt .....	134
10. VEDELIKE MEHAANIKA .....	143
10.1. Sisehõõrdumine vedelikes .....	143
10.2. Ideaalse vedeliku statsionaarne	
voolamine .....	144

10.3. Pidevuse võrrand .....	146
10.4. Bernoulli võrrand .....	147
10.5. Reaalsete vedelike voolamine toru- des .....	151
10.6. Viskoosse vedeliku statsionaarne voolamine ühtlase ümmarguse rist- lõikega horisontaalses torus .....	152
10.7. Bernoulli võrrandi rakendatavusest reaalsete vedelike voolamise arvu- tamiseks .....	155
10.8. Kehade liikumine realses vedelikus või gaasis .....	157
Ülesandeid .....	167
11. VÕNKUMISED .....	176
11.1. Harmooniline võnkumine .....	176
11.2. Füüsikaline pendel .....	180
11.3. Matemaatiline pendel.....	182
11.4. Omavõnkumised .....	184
11.5. Võnkumiste sumbumine .....	188
11.6. Sundvõnkumised. Resonants .....	191
11.7. Võnkumiste liitmine .....	195
Ülesandeid .....	201
12. LAINED .....	212
12.1. Lained elastses keskkonnas .....	212
12.2. Lainevõrrand .....	213
12.3. Energia levimine laineprotsessis...	214
12.4. Umovi vektor .....	217
12.5. Lainete levimise kiirus keskkonnas.	218
12.6. Lainete interferents .....	222
12.7. Seisvad lained .....	224
Ülesandeid .....	226
13. AKUSTIKA ELEMENTE .....	231
13.1. Doppleri efekt .....	232
13.2. Hääle tajumine .....	235

13.3. Keelte võnkumine .....	237
13.4. Laine levimise kiirus keeles .....	239
13.5. Õhusammaste võnkumine viledes ....	240
Ülesandeid .....	242
Kasutatud kirjandus .....	250

О. Манкин  
МЕХАНИКА В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ  
На эстонском языке  
Тартуский государственный университет  
ЭССР, г. Тарту, ул. Кликкооли, 18  
Vastutav toimetaja O. Seeman  
Korrektor M. Raisma

=====

Paljundamisele antud 5. XI 1973. Trükipaber nr. 2, 30x42. 1/4. Trükipoognaid 16,0. Tingtrükipoognaid 14,8. Arvestuspoognaid 11,68. Trükiarv 1000. MB 09702.

Tell. nr. 1078.

TRU rotaprint, ENSV, Tartu, Pälsoni tn. 14.

Hind 40 kop.



40 kop.